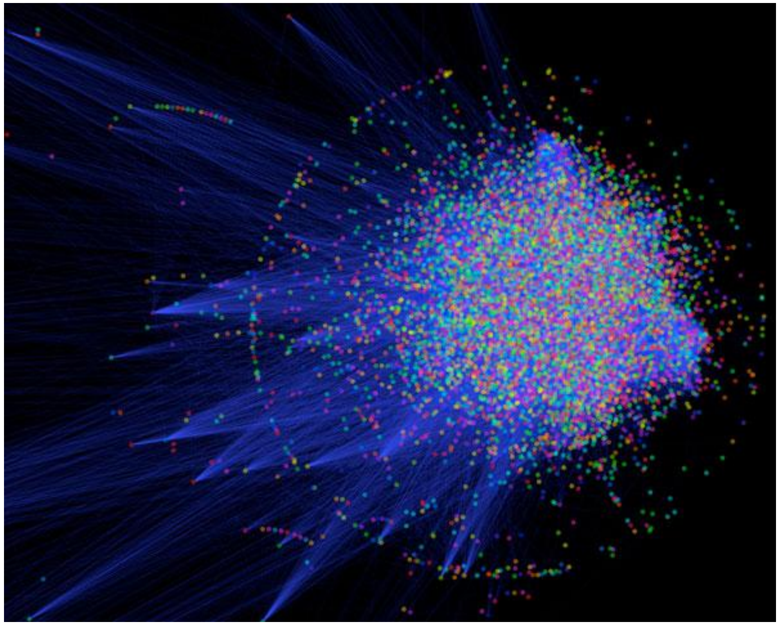
Modelos de Rede

Universidade Federal do ABC

CRIANDO UM MODELO GENÉRICO DE REDE

Por que criar um modelo genérico de rede?

Antigamente era impossível obter informações de todos os nós e arestas de algumas redes.

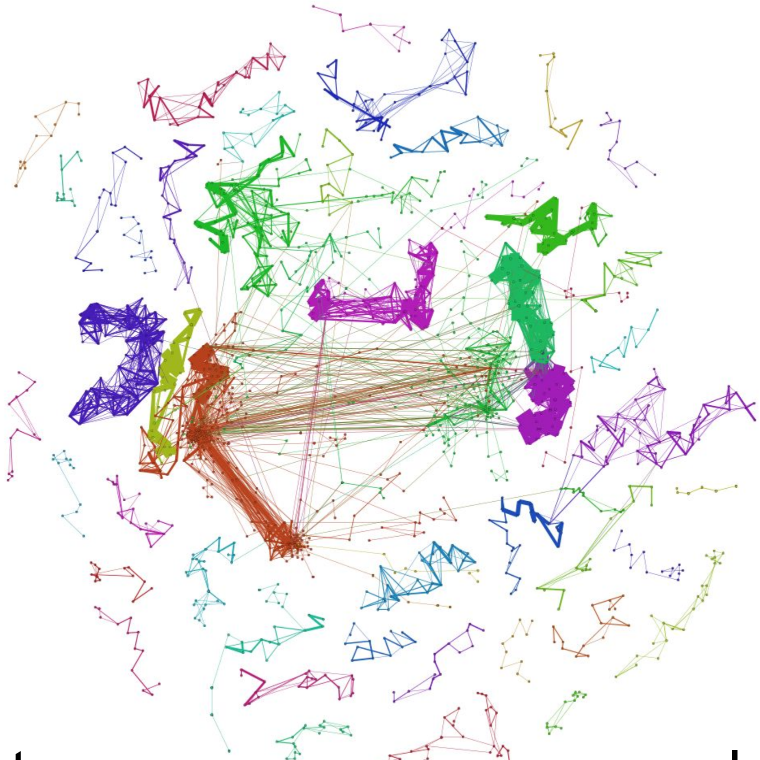


Mesmo hoje, é impossível obter todas as interações entre proteínas de um organismo, por exemplo.

Universidade Federal do ABC

Por que criar um modelo genérico de rede?

Imagine uma rede de co-ocorrência de palavras em um livro.



Feito manualmente, mesmo com apenas algumas páginas, o trabalho poderia se tornar inviável e com alta taxa de erros.

Universidade Federal do ABC

Por que criar um modelo genérico de rede?

Hoje em dia ainda existem redes que não conhecemos por completo! E algumas redes ainda estão se formando!

Como estimar a estrutura de uma rede? Como predizer os próximos nós e arestas dessa rede em construção?

- Quais os próximos nós e arestas do planejamento de um transporte público?
- Quais arestas irão surgir ou sumir em uma rede de relações comerciais?
- Como uma rede social é formada?

Por que criar um modelo genérico de rede?

Além disso, como testar e validar algoritmos de redes se não temos redes de diferentes tamanhos e propriedades?

Como verificar se diferentes redes reais seguem um mesmo modelo?

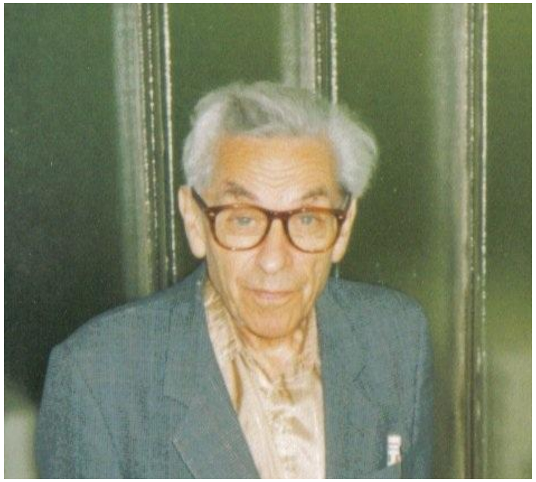
Para isso precisamos identificar as propriedades de determinadas redes e tentar criar um modelo matemático que consegue definir uma rede com as mesmas propriedades.

Universidade Federal do ABC

REDES ALEATÓRIAS: ERDÕS-RÉNYI

Redes Aleatórias

Paul Erdõs e Alfred Rényi (Húngaros) propuseram um dos primeiros modelos para o estudo de análise de redes.



Nesse estudo foi explicado o modelo de Redes Aleatórias, sugerindo que, muitas redes complexas na Natureza poderiam seguir um padrão aleatório de formação.

Universidade Federal do ABC

Redes Aleatórias

Com o modelo proposto de Redes Aleatórias eles tentaram verificar como as redes sociais eram formadas.

Para exemplificar eles pensaram na rede social formada em uma festa.

http://greveufabc.wordpress.com/2012/08/08/fotos-da-festa-greve-olimpica/

Universidade Federal do ABC

Redes Aleatórias

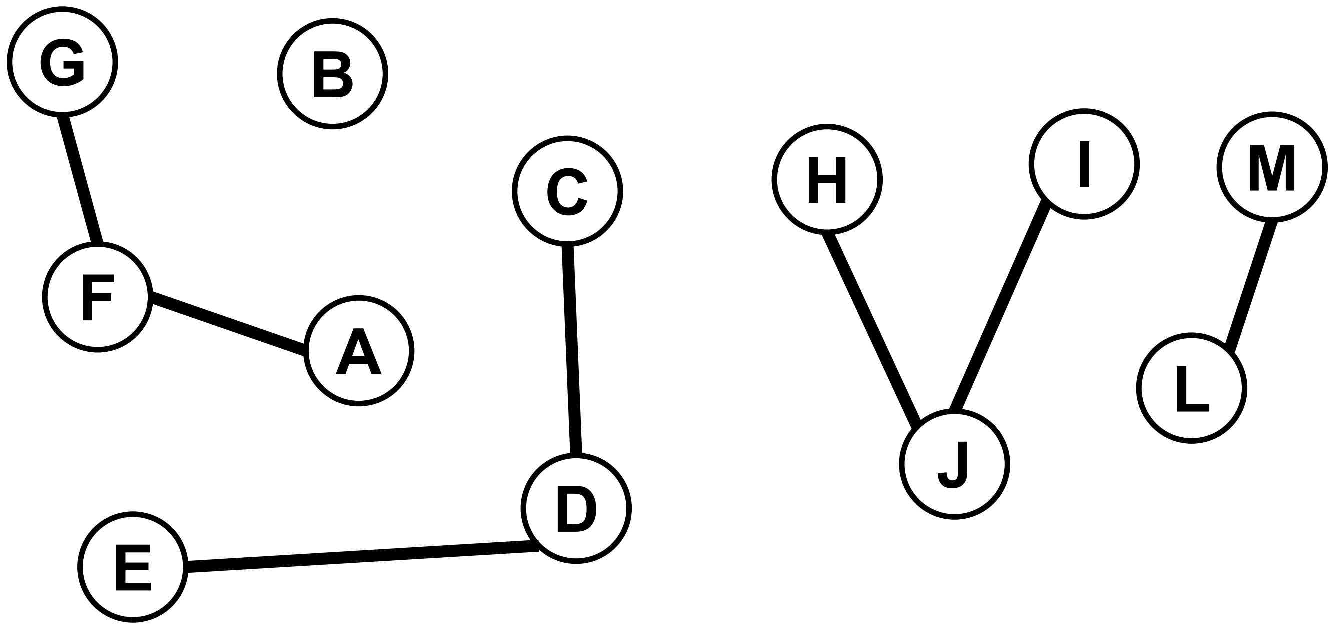
Eles perceberam que bastava apenas uma conexão entre cada um dos convidados para que, ao final da festa, todos se tornassem conectados.

Dessa forma concluiu-se que uma festa é um conjunto de agrupamentos de pessoas que se interligavam através de uma ou mais arestas (pontes).

Universidade Federal do ABC

Redes Aleatórias

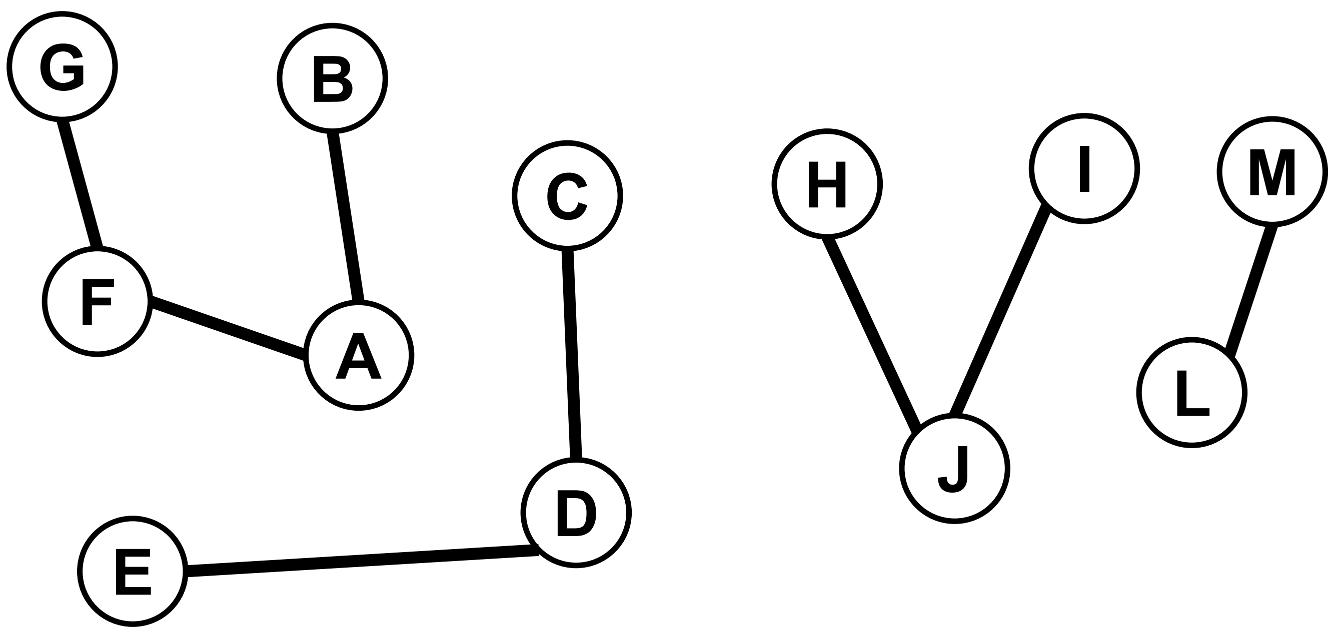
Em uma rede com *n* nós, criar arestas entre pares de nós de forma aleatória (por sorteio) e sem repetição. Inicialmente temos uma rede **DESCONEXA**.



Universidade Federal do ABC

Redes Aleatórias

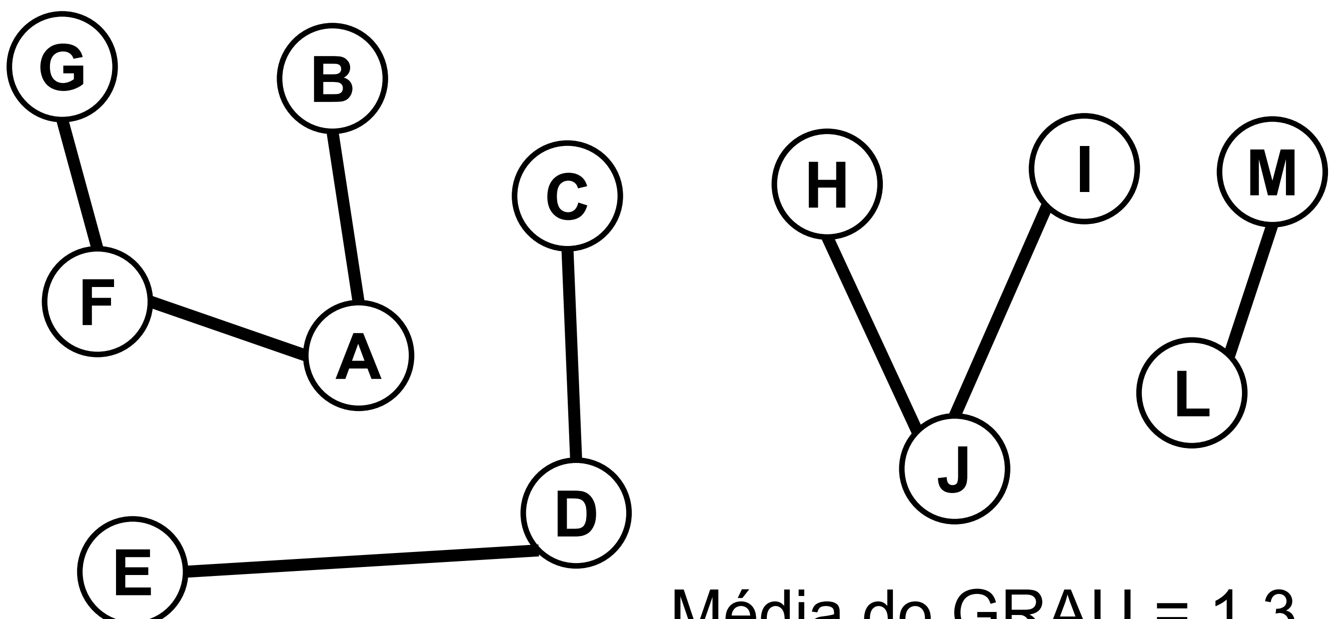
Quando o número de conexões aumenta, os **COMPONENTES CONEXOS** são interligados, formando grupos cada vez maiores.



Universidade Federal do ABC

Redes Aleatórias

Quando o **GRAU** médio dos nós atinge um valor acima de 1, o número de **COMPONENTES DESCONEXOS** diminui exponencialmente.

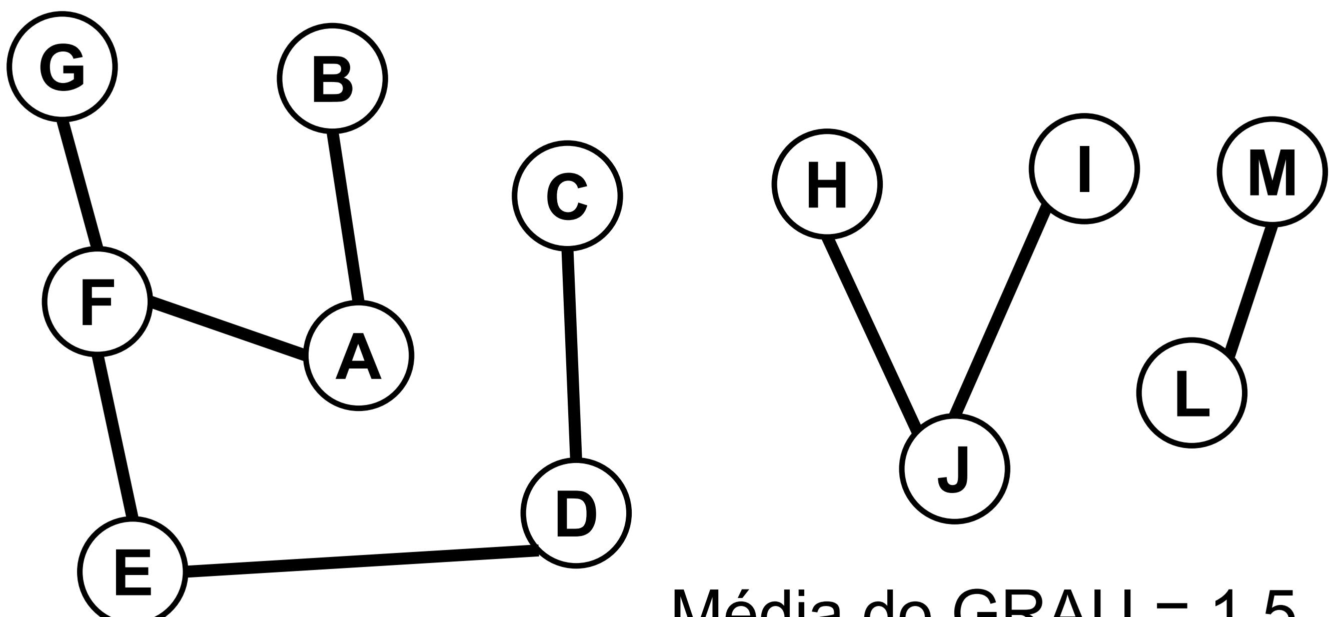


Média do GRAU = 1,3
COMPONENTES = 4

Universidade Federal do ABC

Redes Aleatórias

Quando o **GRAU** médio dos nós atinge um valor acima de 1, o número de **COMPONENTES DESCONEXOS** diminui exponencialmente.

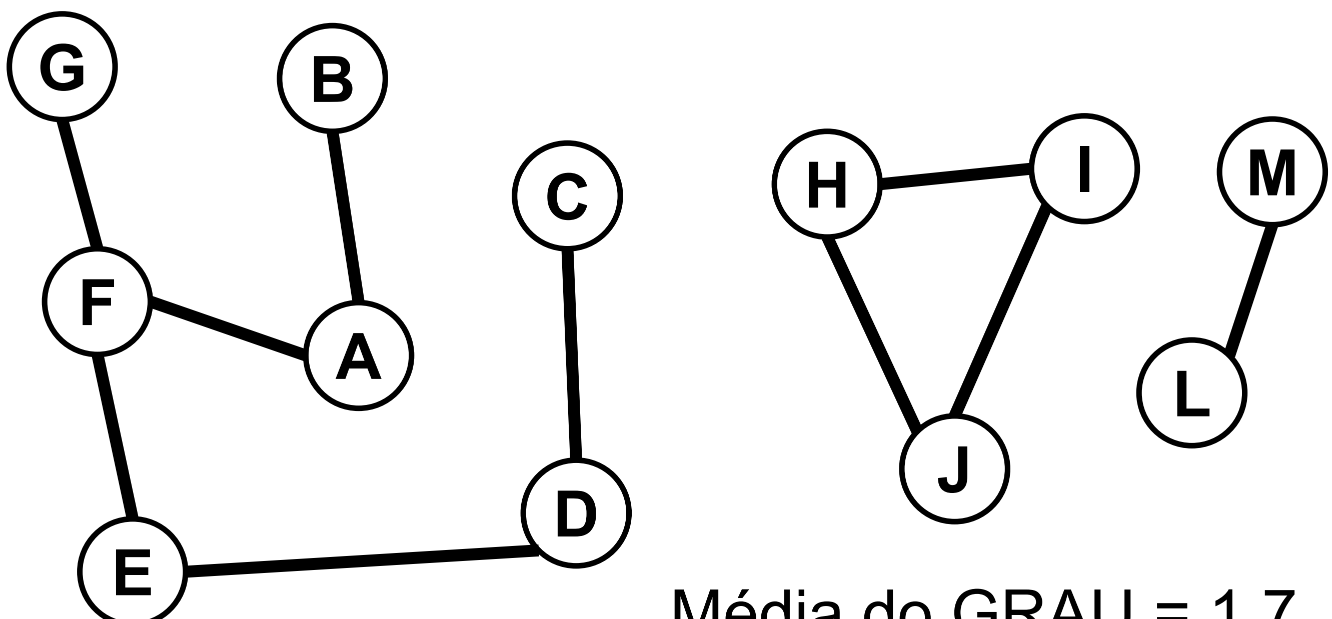


Média do GRAU = 1,5
\# COMPONENTES = 3

Universidade Federal do ABC

Redes Aleatórias

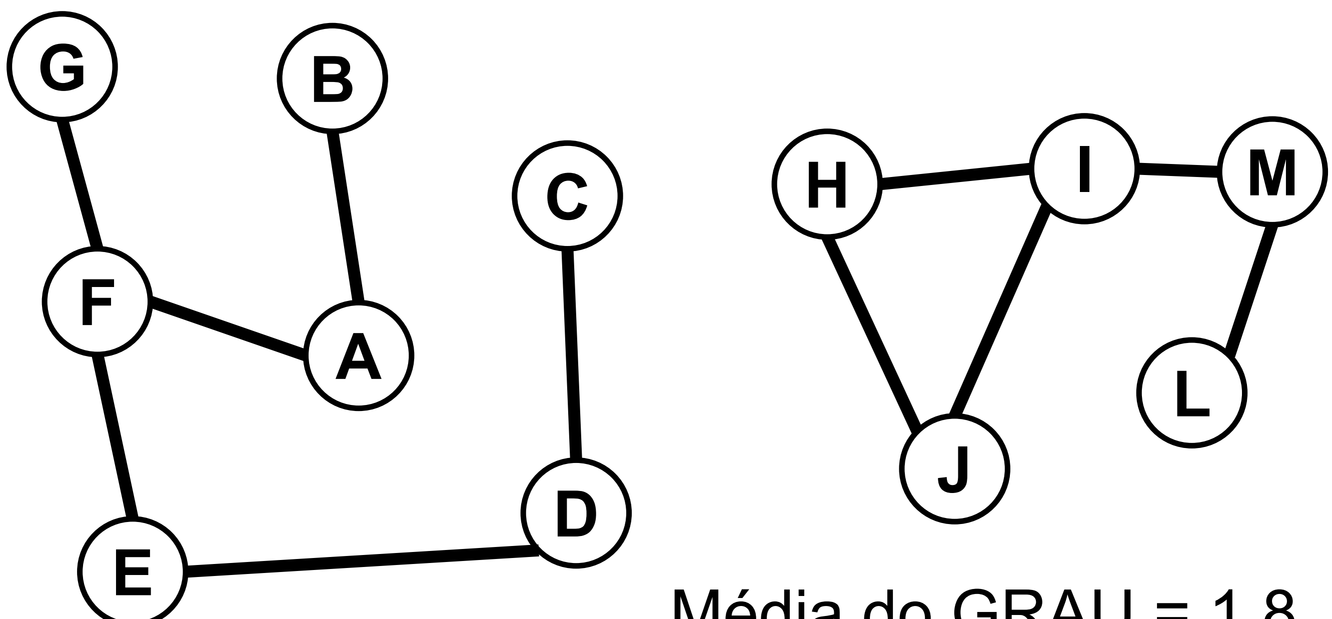
Quando o **GRAU** médio dos nós atinge um valor acima de 1, o número de **COMPONENTES DESCONEXOS** diminui exponencialmente.



Média do GRAU = 1,7
COMPONENTES = 3

Redes Aleatórias

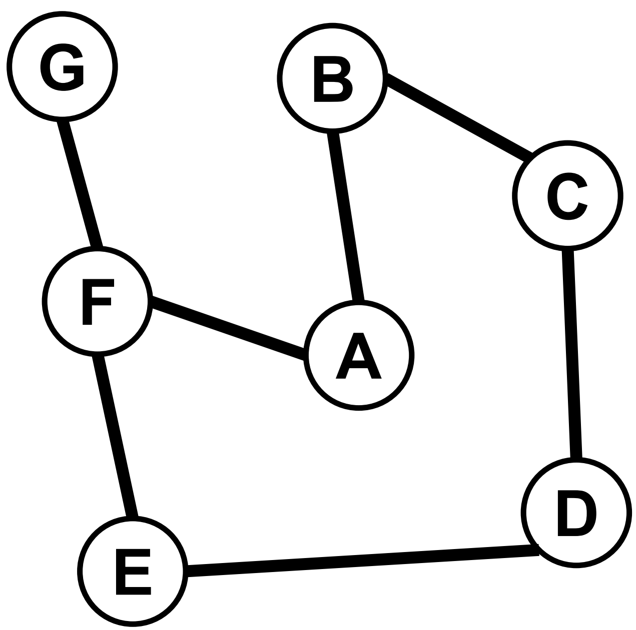
Quando o **GRAU** médio dos nós atinge um valor acima de 1, o número de **COMPONENTES DESCONEXOS** diminui exponencialmente.

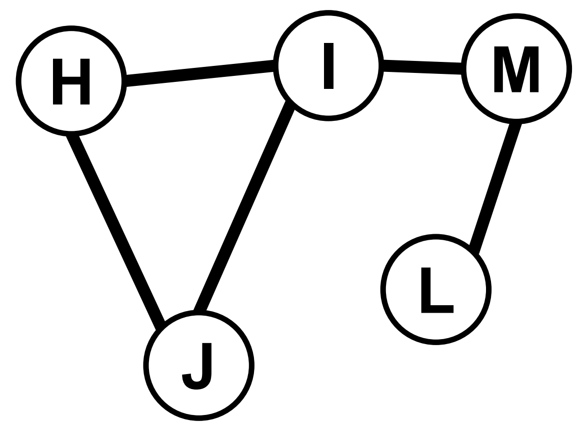


Média do GRAU = 1,8
COMPONENTES = 2

Redes Aleatórias

Quando o **GRAU** médio dos nós atinge um valor acima de 1, o número de **COMPONENTES DESCONEXOS** diminui exponencialmente.

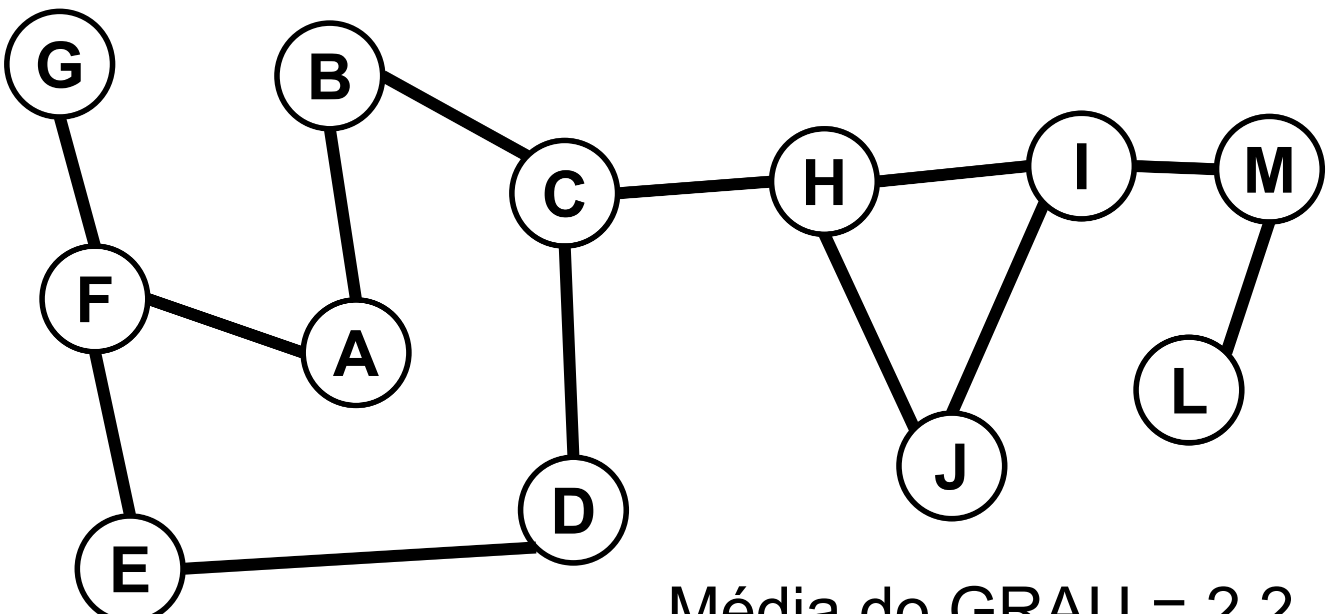




Média do GRAU = 2
COMPONENTES = 2

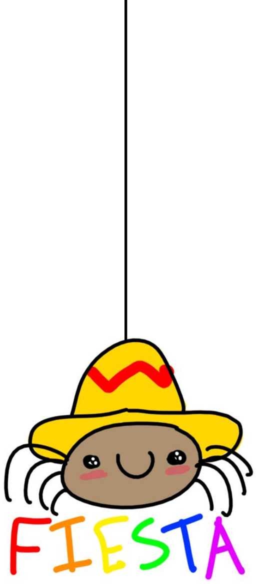
Redes Aleatórias

Rapidamente a **REDE** se torna **CONECTADA**.

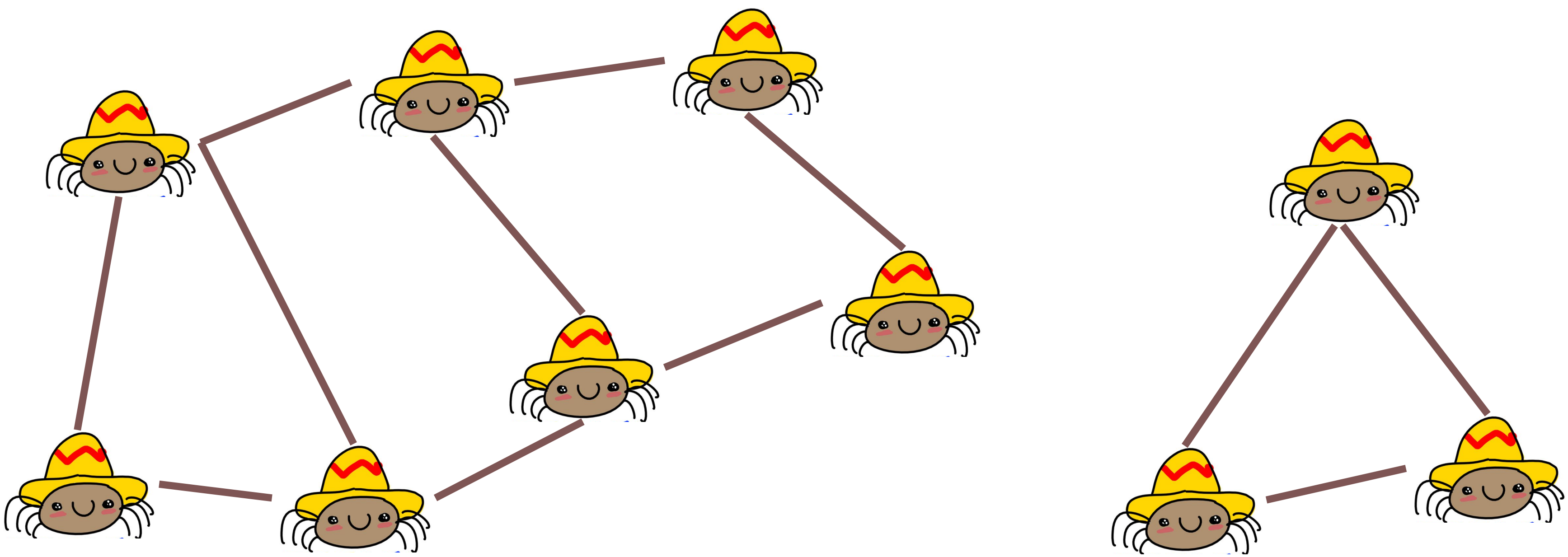


Média do GRAU = 2,2
COMPONENTES = 1

Festa!!!!

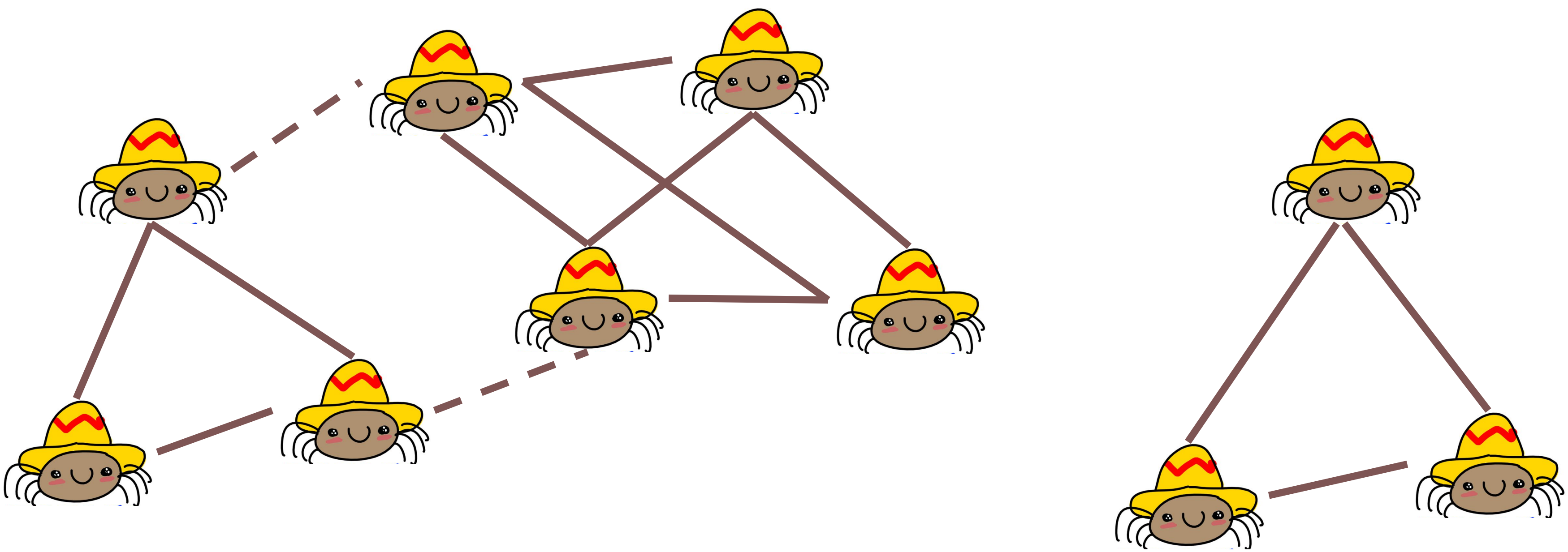


Como uma analogia imagine uma festa onde cada convidado conhece de 2 a 3 pessoas.



Festa!!!!

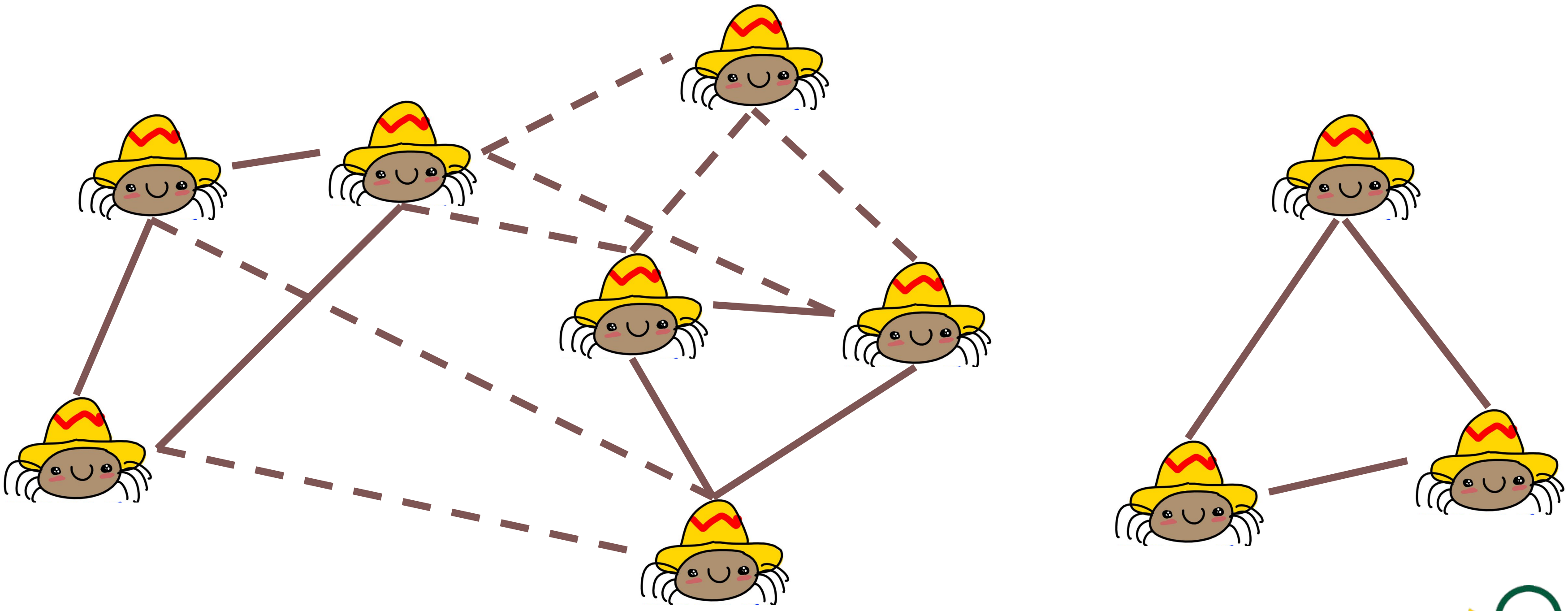
Os convidados formam então rodas de conversa e novas arestas são formadas.



Universidade Federal do ABC

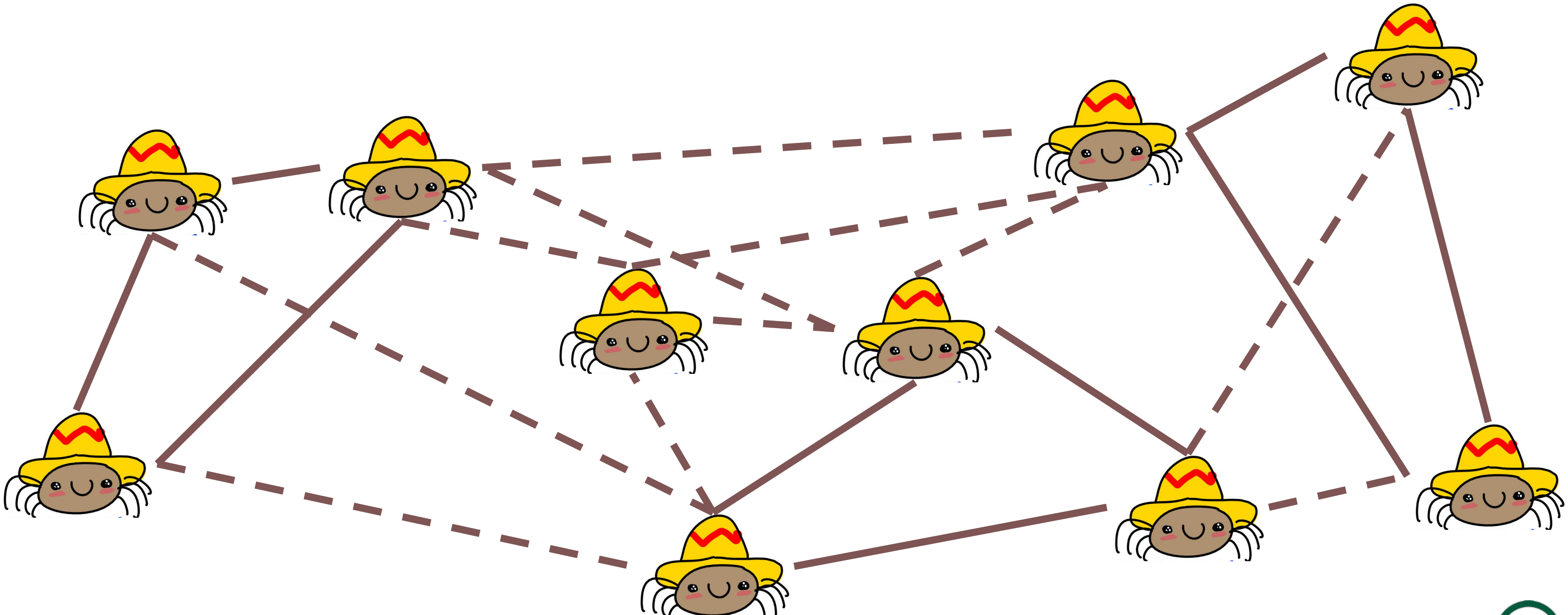
Festa!!!!

Existe a troca de rodas de conversa, gerando mais novas arestas.



Festa!!!!

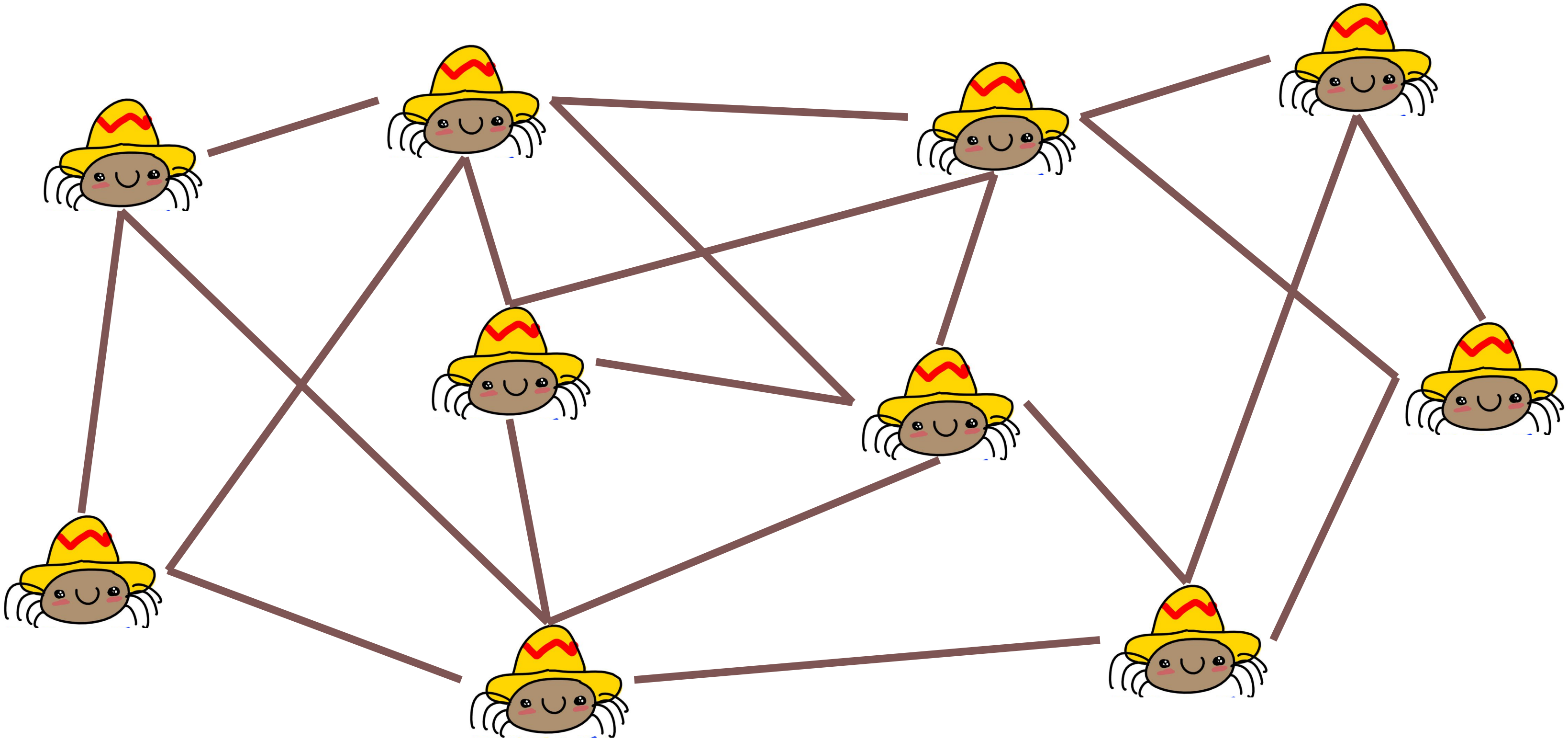
E, eventualmente, desconhecidos também passam a se conhecer.



Universidade Federal do ABC

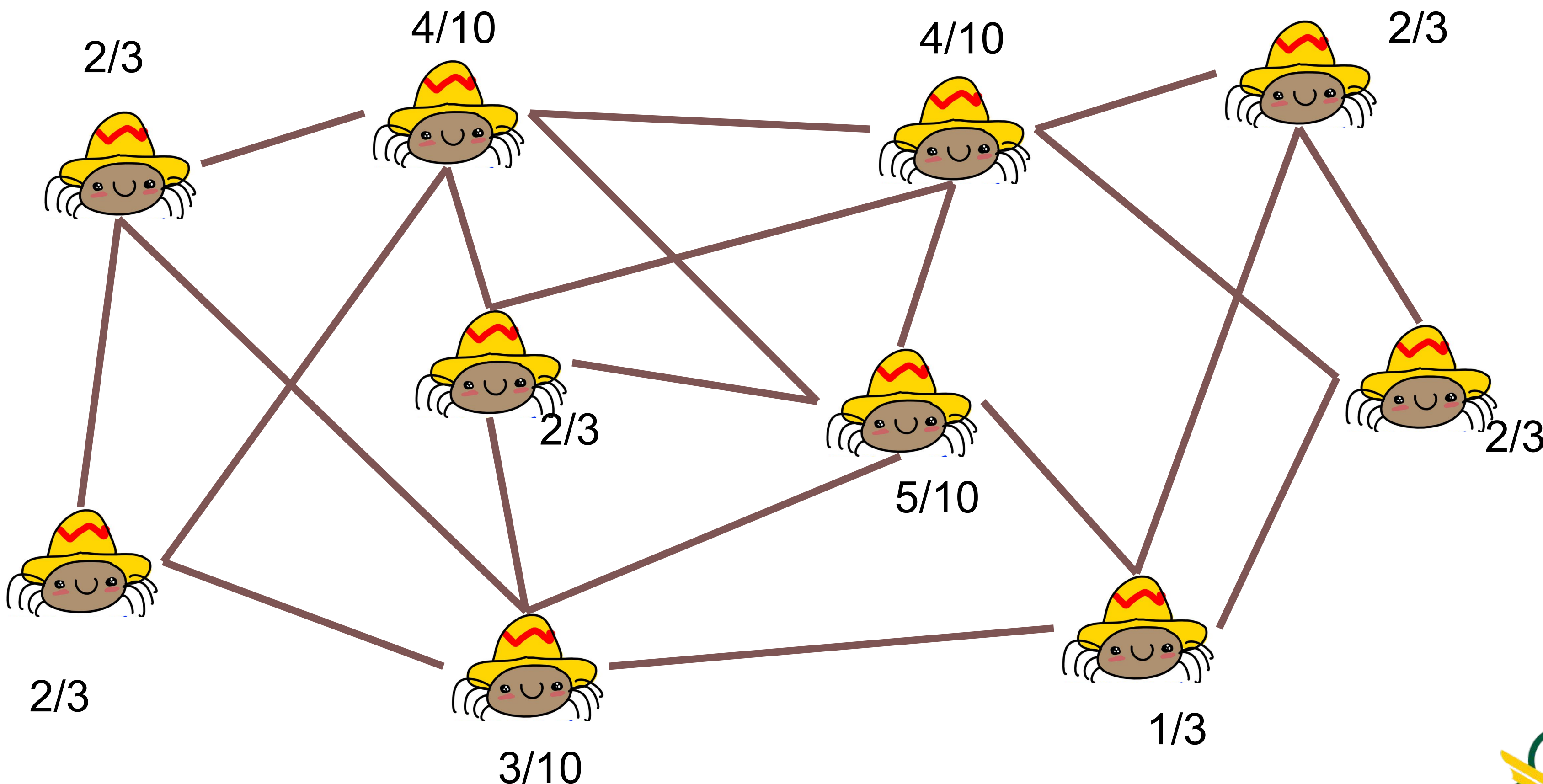
Festa!!!!

Forma-se, ao final, uma rede conectada e com diâmetro pequeno



Festa!!!!

Porém com um coeficiente de agrupamento não tão alto!



Coeficiente de agrupamento médio = 0,53

Criando uma rede aleatória

O modelo para a criação de uma rede aleatória de Erdõs-Rényi é representado por:

$$G(n,p)$$

com *n* sendo o número de nós e *p* a probabilidade de que dois nós tenha uma ligação entre si.

Cada possível aresta da rede é adicionada com probabilidade *p*.

Criando uma rede aleatória

- Essa probabilidade está associada a densidade da rede.

Densidade da rede é a relação entre o número de arestas que estão presentes na rede e o número total de arestas possíveis em uma rede com N nós.

$$p = \frac{|E|}{N.(N-1)}$$

Universidade Federal do ABC

Criando uma rede aleatória

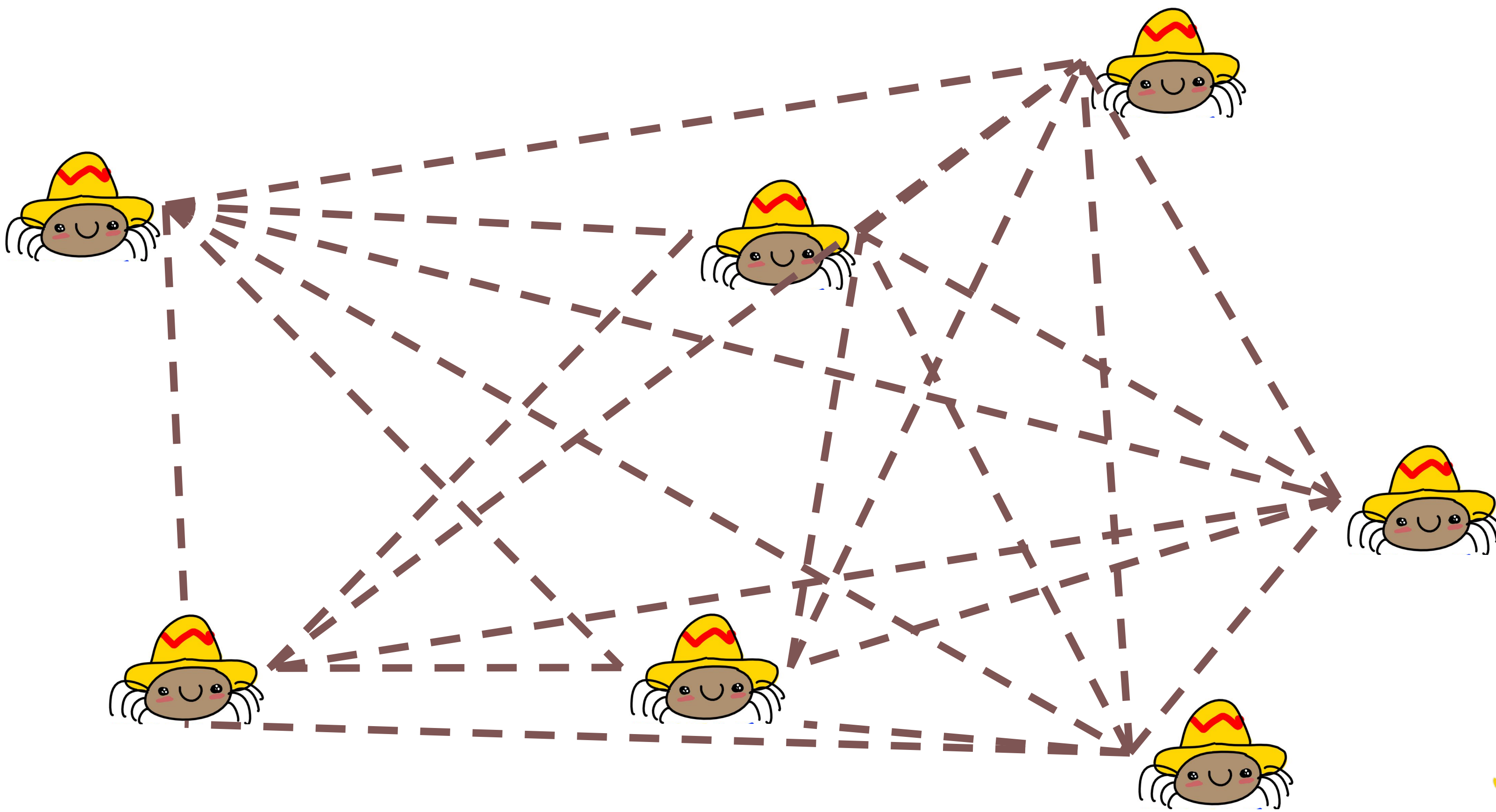
Redes reais geralmente tem uma densidade abaixo de 0,01.

Então para simular tais redes é natural utilizar probabilidades baixas.

Como ilustração vamos utilizar p=0.3 no modelo a seguir.

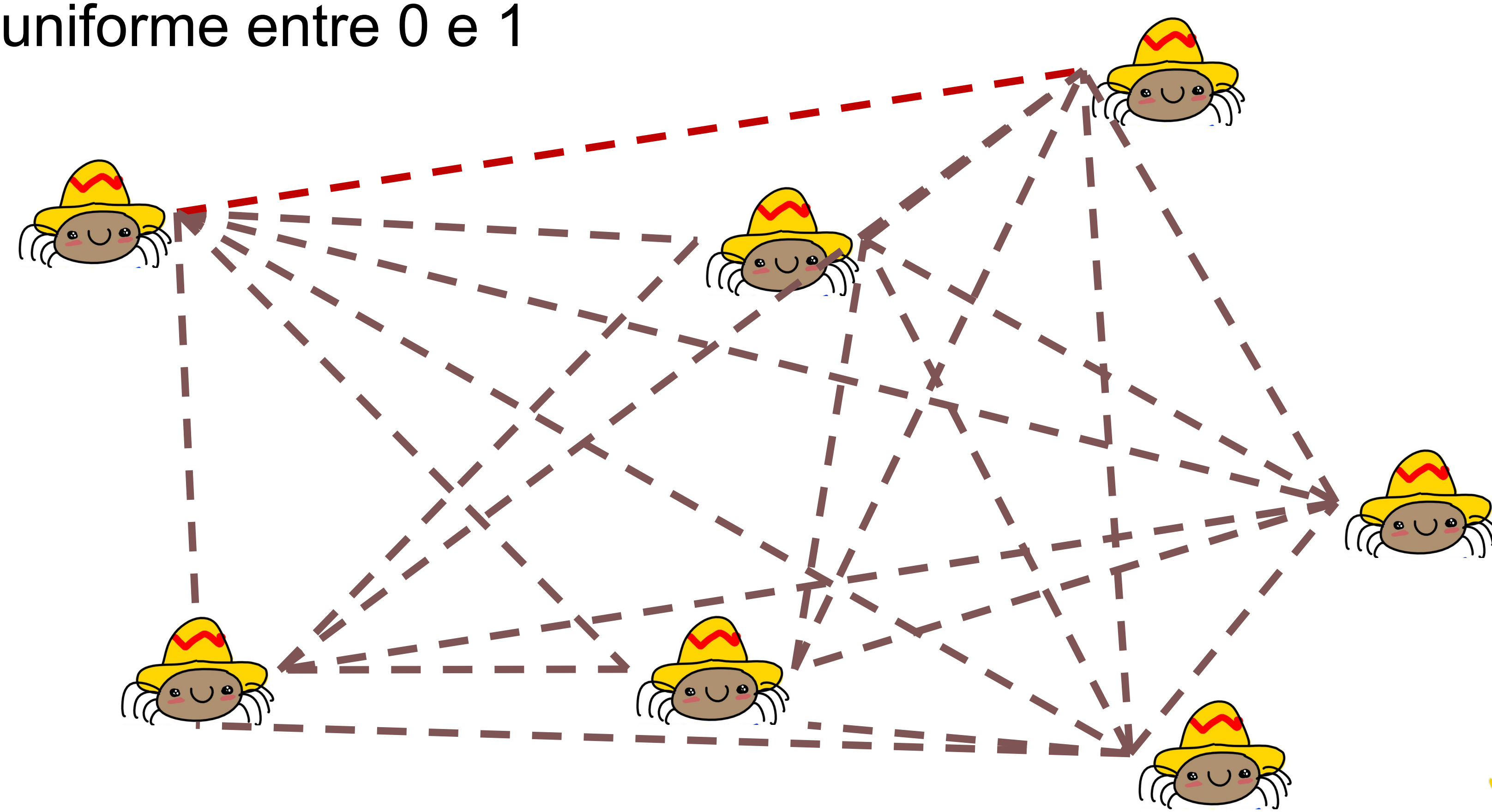
Gerando uma rede aleatória

G(7,0.3)



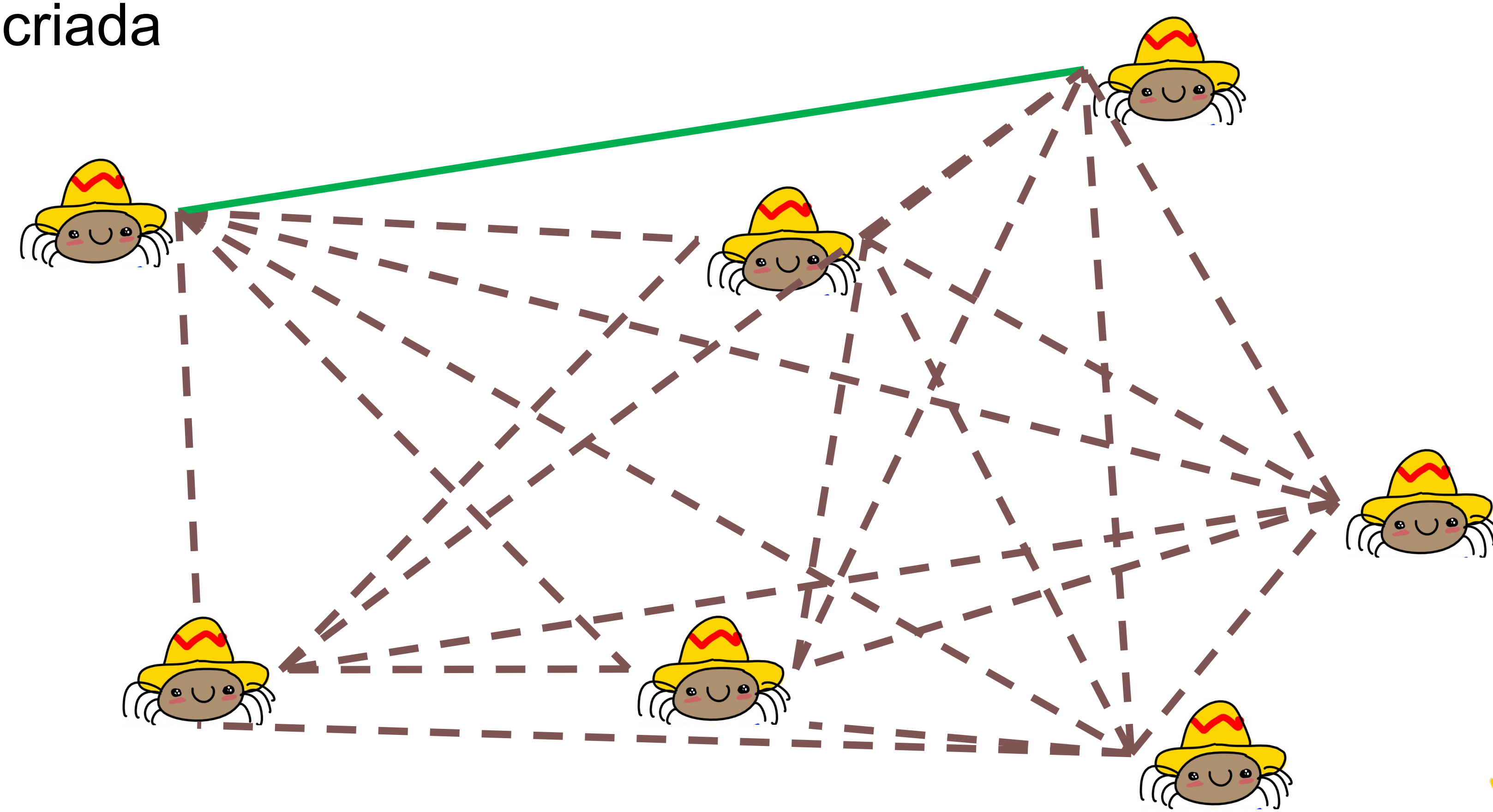
Gerando uma rede aleatória

G(7,0.3): para cada aresta, sorteia um número aleatório uniforme entre 0 e 1



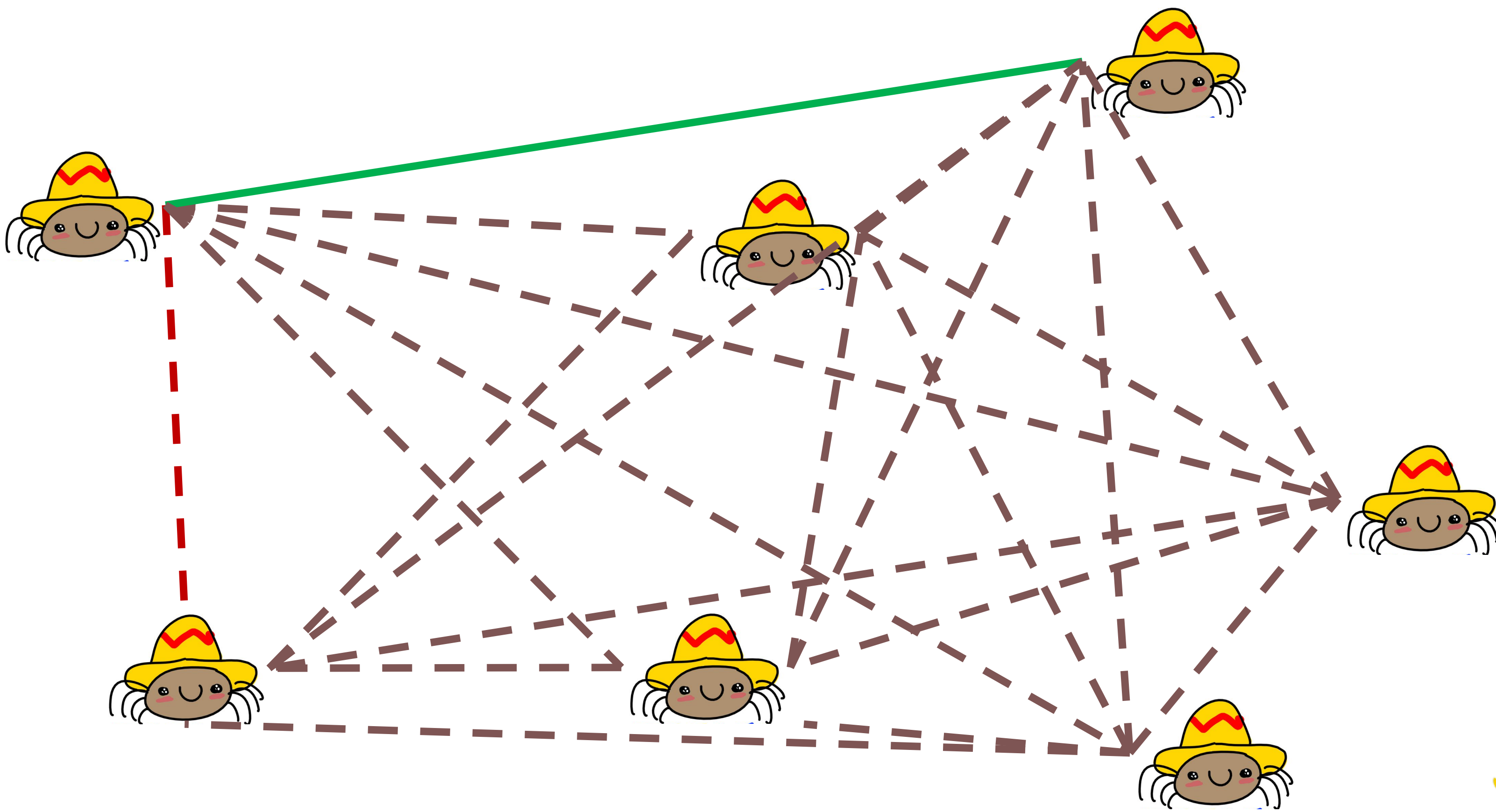
Gerando uma rede aleatória

G(7,0.3): se o número for menor ou igual a 0,3 a aresta é criada



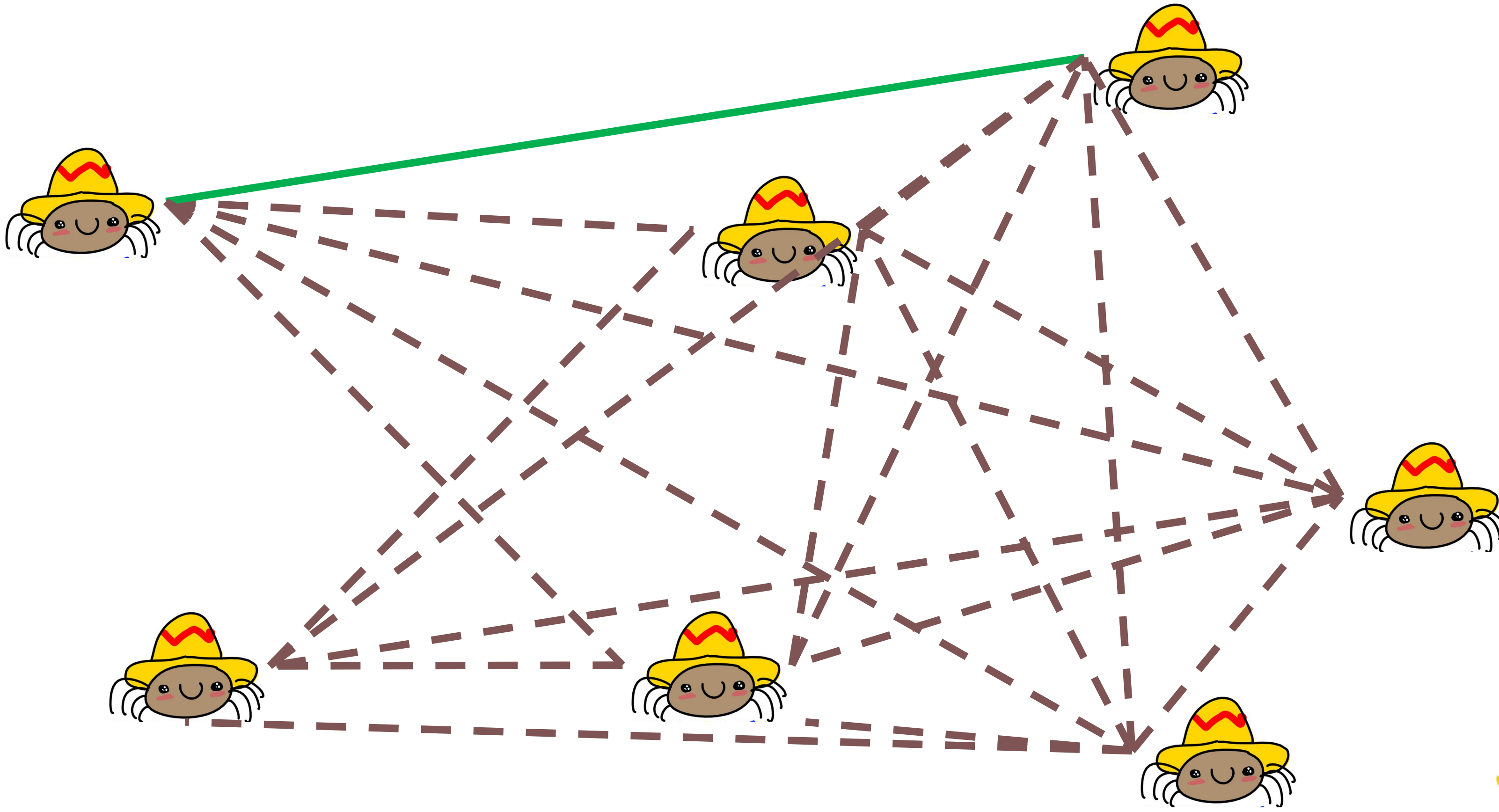
Gerando uma rede aleatória

G(7,0.3): caso contrário, a aresta é ignorada



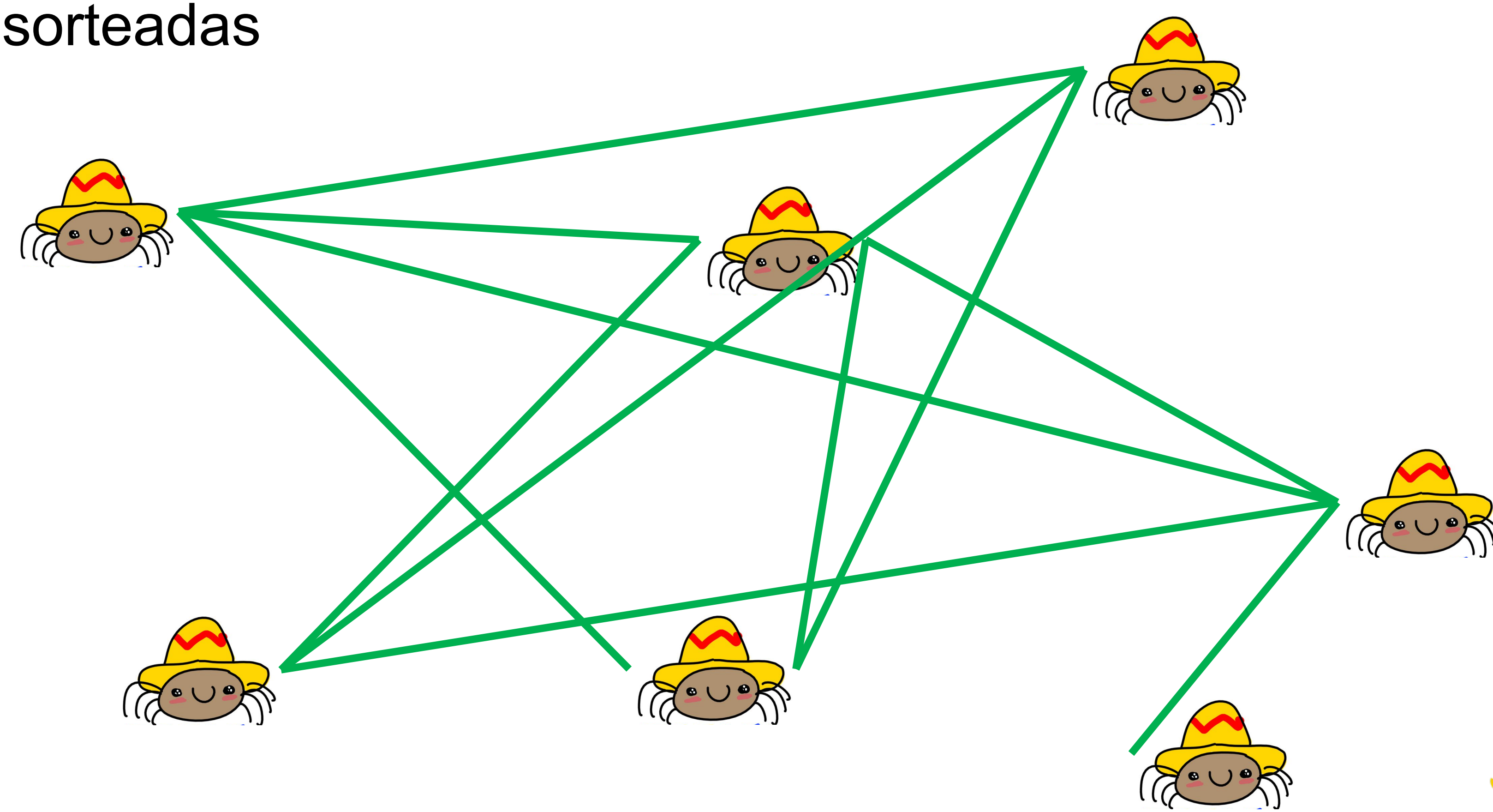
Gerando uma rede aleatória

G(7,0.3): caso contrário, a aresta é ignorada



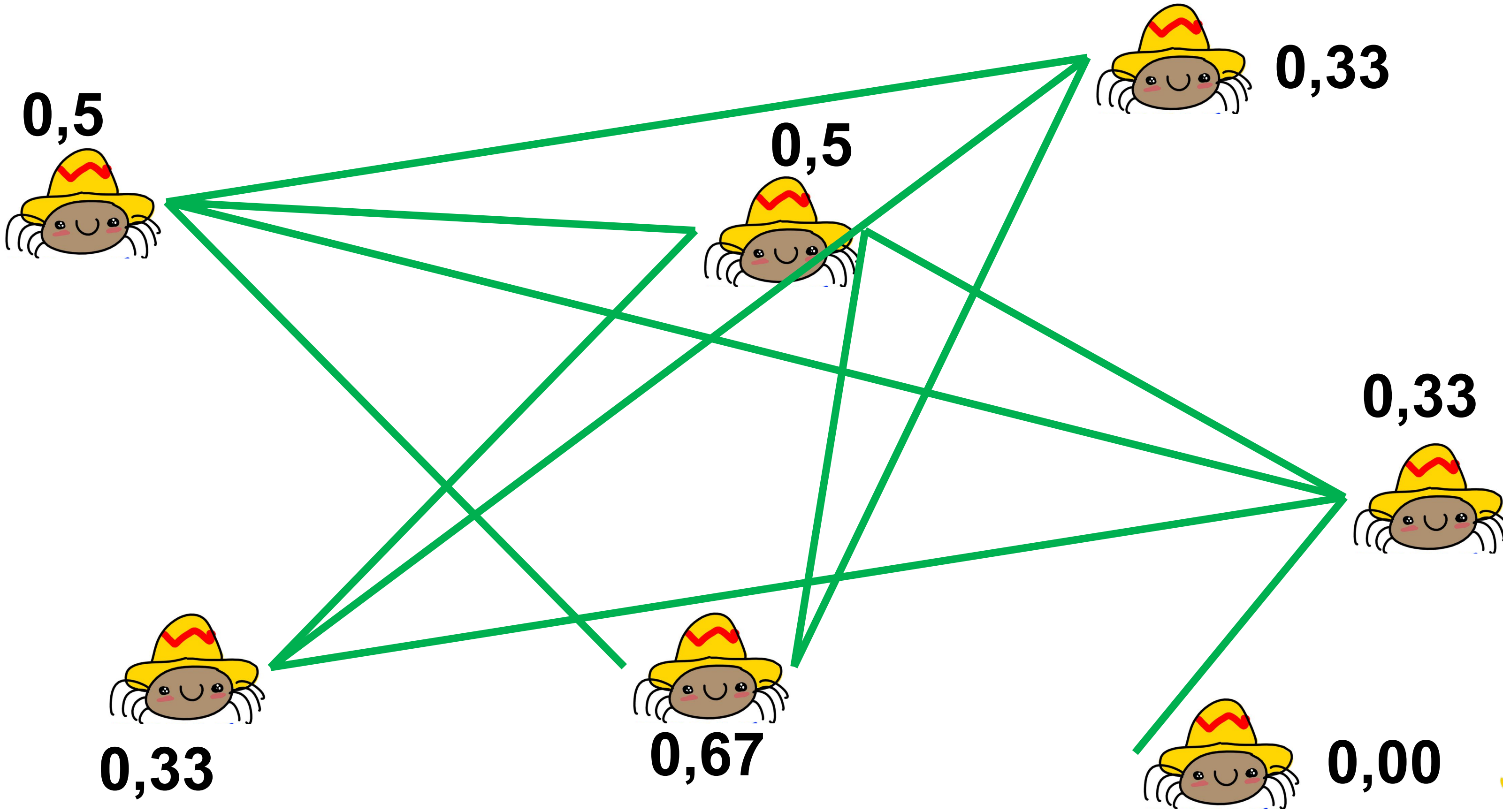
Gerando uma rede aleatória

G(7,0.3): das possíveis arestas, cerca de 13 serão sorteadas



Gerando uma rede aleatória

O coeficiente de agrupamento médio é igual a 0,44.



Temos um modelo...?

Embora com esse modelo possamos gerar redes aleatórias de qualquer ORDEM, logo foi identificado que ela apresenta algumas características que diferem de redes reais, tais como:

- Tendência de geração de nós com coeficiente de agrupamento baixo e baixa ocorrência de fechamentos triádicos;
- A distribuição dos graus dos nós segue uma forma diferente de redes reais.

Universidade Federal do ABC

Temos um modelo...?

- No modelo G(n,p) esperamos obter p*n*(n-1)/2 arestas ou

$$E(arestas) = \binom{n}{2} p$$

Temos um modelo...?

No modelo G(n,p) esperamos obter p*n*(n-1)/2 arestas ou

$$E(arestas) = \binom{n}{2} p$$

P(grau(v)=k) = ?

Universidade Federal do ABC

Temos um modelo...?

- No modelo G(n,p) esperamos obter p*n*(n-1)/2 arestas ou

$$E(arestas) = \binom{n}{2} p$$

$$P(grau(v) = k) = \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k}$$

Universidade Federal do ABC

Temos um modelo...?

- No modelo G(n,p) esperamos obter p*n*(n-1)/2 arestas ou

$$E(arestas) = \binom{n}{2} p$$

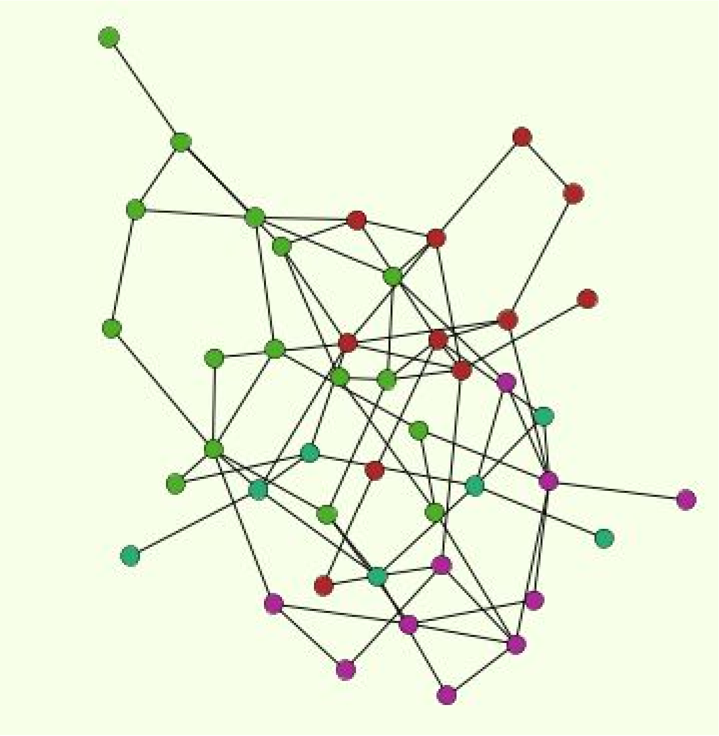
$$P(grau(v) = k) = \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k}$$

$$P(grau(v) = k) \to \frac{(np)^k e^{-np}}{k!}, n \to \infty$$

Universidade Federal do ABC

Temos um modelo...?

- Tendência de geração de nós com coeficiente de agrupamento baixo e baixa ocorrência de fechamentos triádicos:

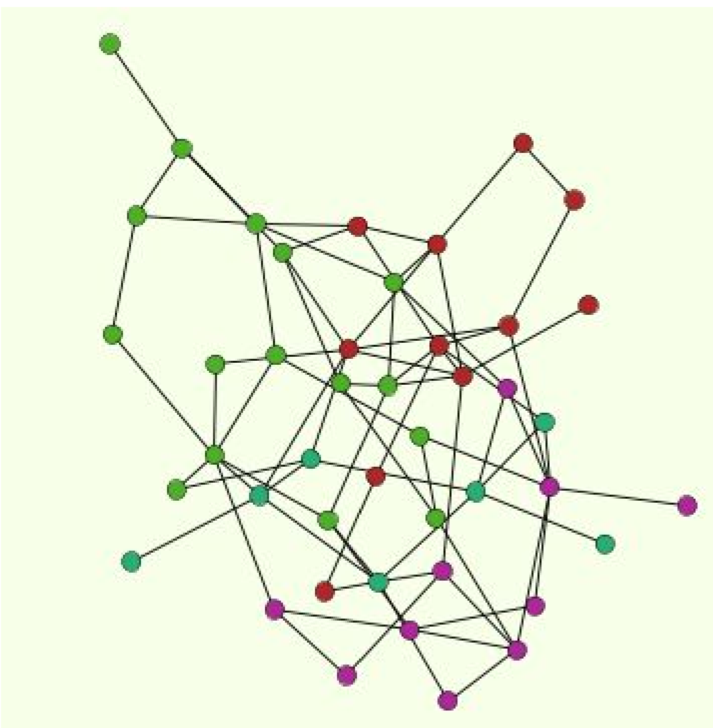


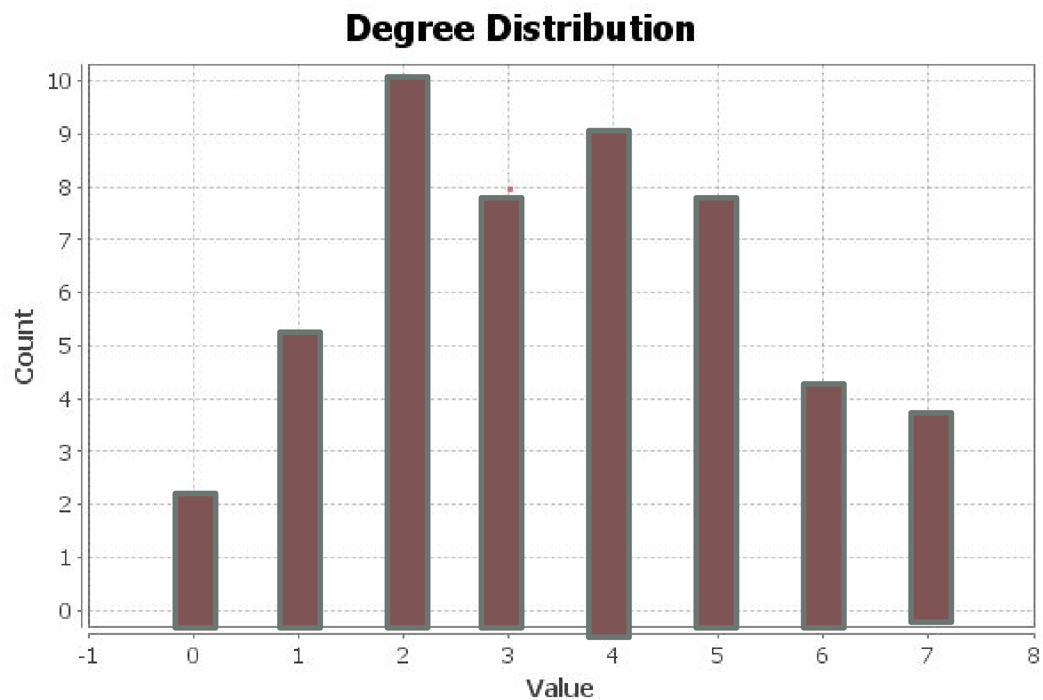
Ordem = 50
Tamanho = 81
Coef. de Agrupamento Médio = 0,035
No. de Fechamentos Triádicos = 12

Universidade Federal do ABC

Temos um modelo...?

- A distribuição dos graus dos nós segue uma forma diferente de redes reais:

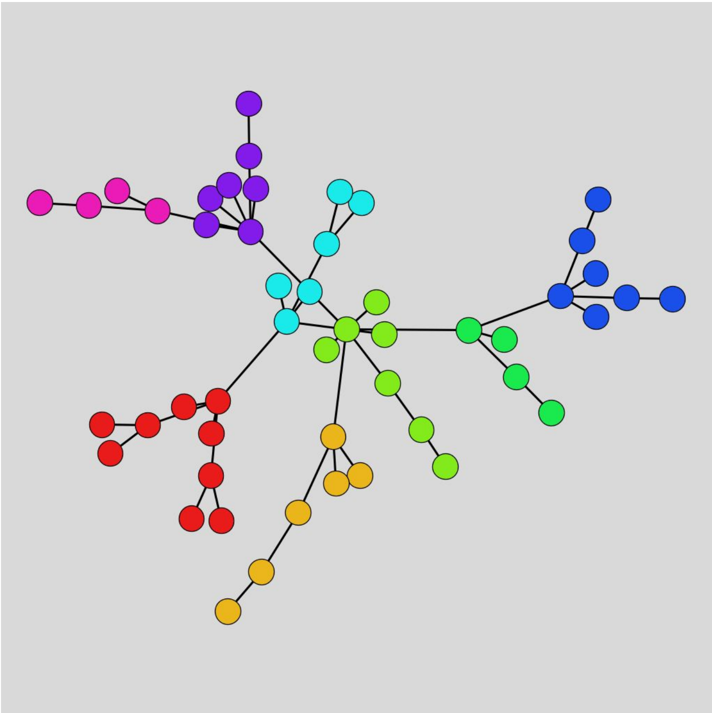


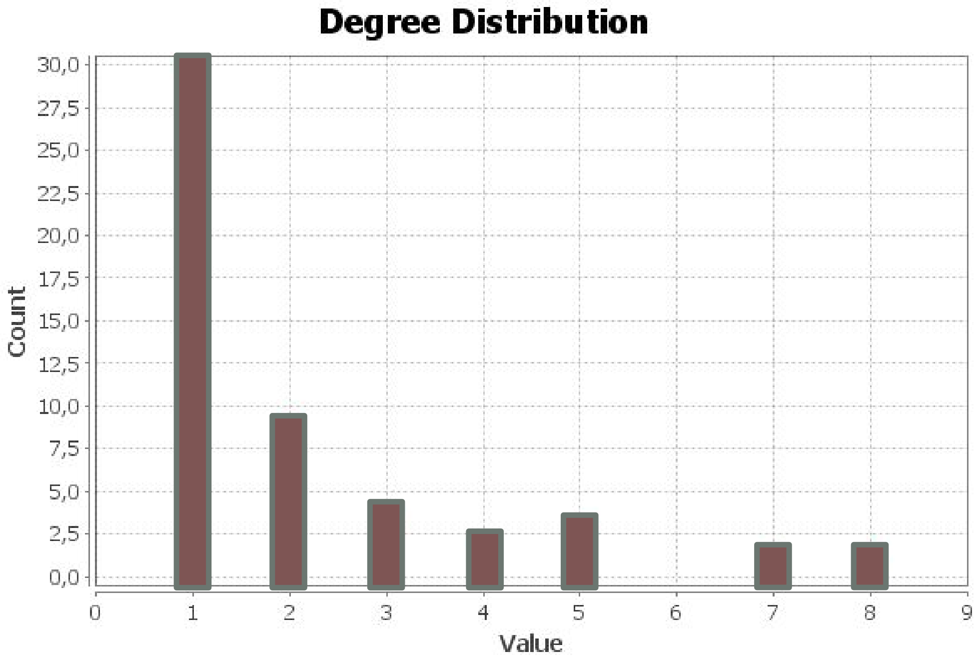


Universidade Federal do ABC

Temos um modelo...?

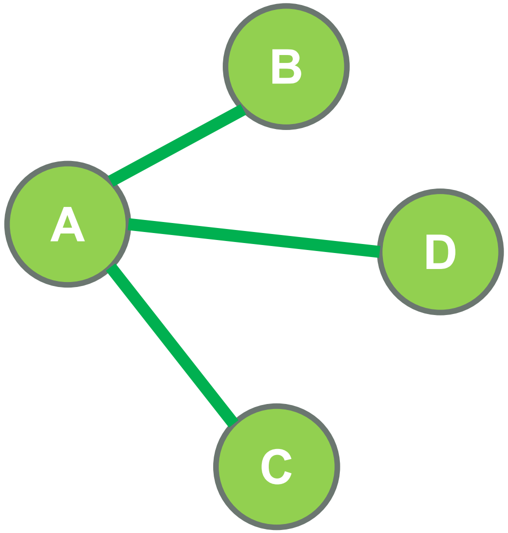
- A distribuição dos graus dos nós segue uma forma diferente de redes reais:





Temos um modelo...?

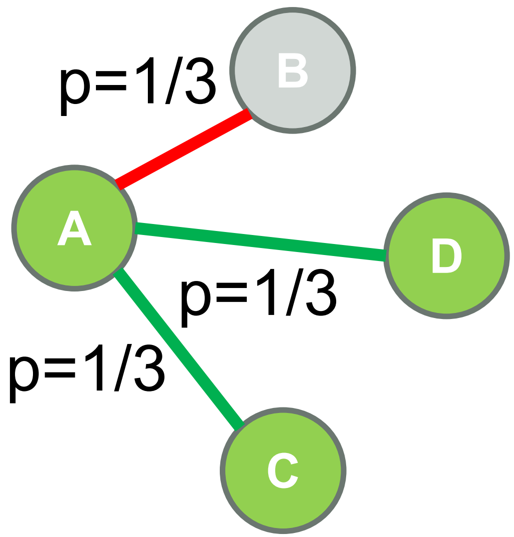
A grande utilidade desse modelo é que ela possibilita o estudo da difusão da informação na rede.



Na aula 2 aprendemos o procedimento de Busca em Largura que indica como uma informação percorre a rede caso ela se propague igualmente para todos os vizinhos.

Temos um modelo...?

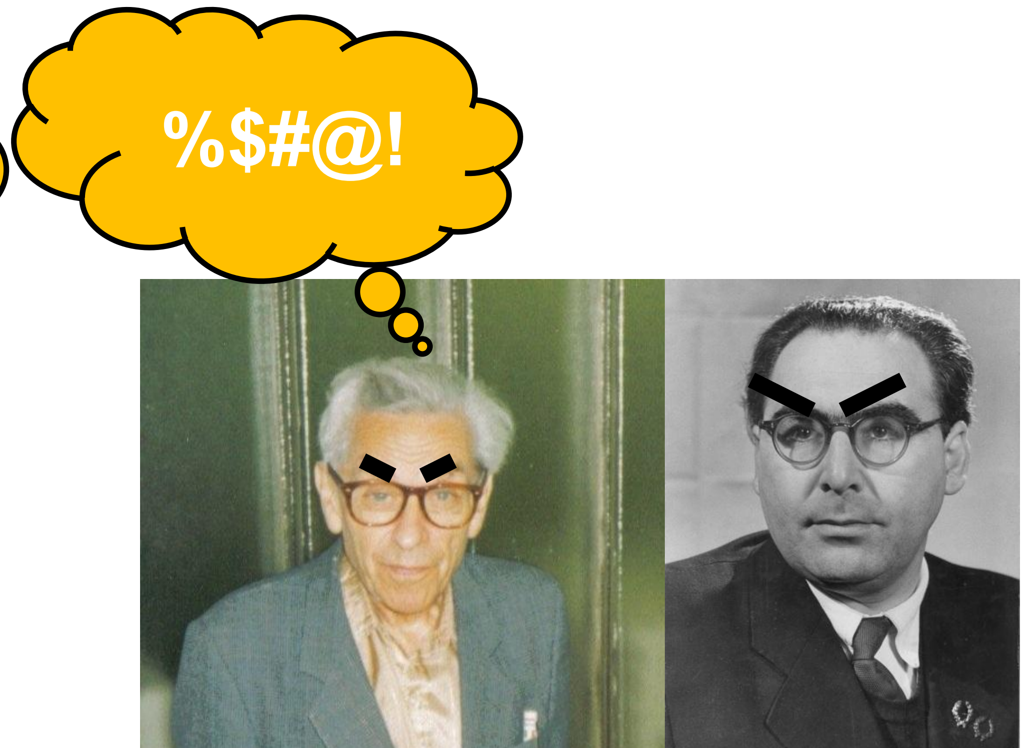
Porém, na realidade, a informação percorre uma aresta com certa probabilidade!



Com isso, temos que a informação se propaga da mesma forma como uma rede aleatória Erdõs-Rényi é gerada!

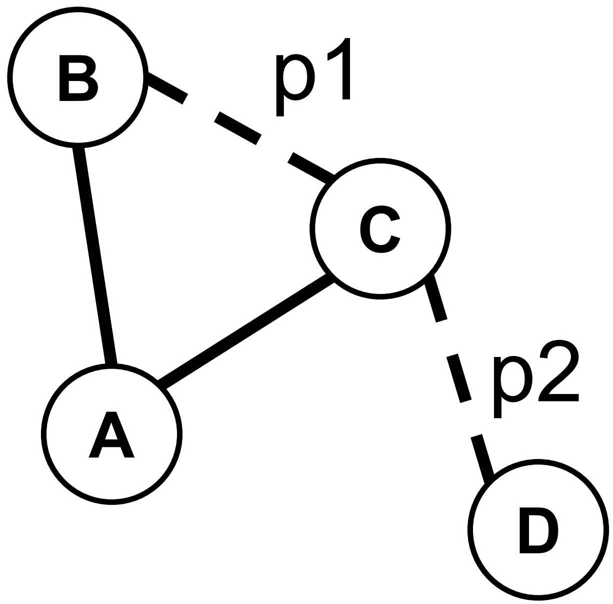
Redes Mundo Pequeno

Vimos que uma característica das redes reais é as propriedades de mundo pequeno: distância média pequena e coeficiente de agrupamento alto.



Redes Mundo Pequeno

Dados os nós A, B, C, D tal que (A,B) e (A,C) formam uma aresta.



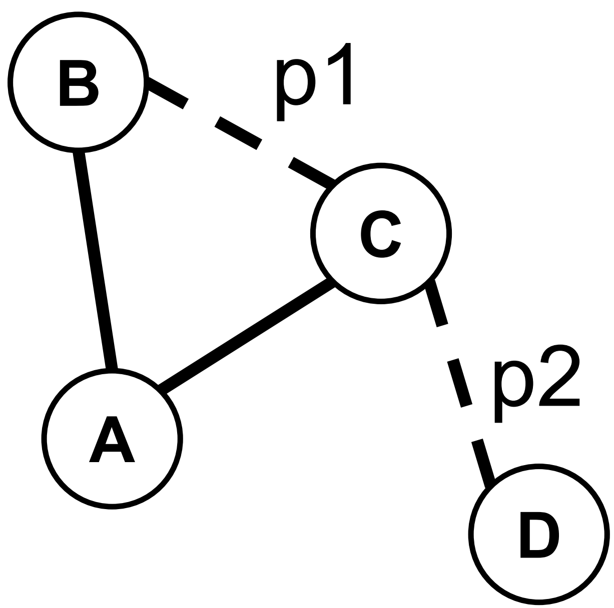
p1=p2

Em uma rede aleatória a probabilidade de ser criada a aresta (B,C) e (C,D) é a mesma!!

Universidade Federal do ABC

Redes Mundo Pequeno

Mas em uma rede mundo pequeno o fato de A estar conectado tanto a B quanto a C faz com que a probabilidade de existir (B,C) seja maior do que (C,D).



p1>p2

Lembrem-se do **FECHAMENTO TRIÁDICO**.

Universidade Federal do ABC

Universidade Federal do ABC

CONSTRUINDO UM MODELO DE MUNDO PEQUENO

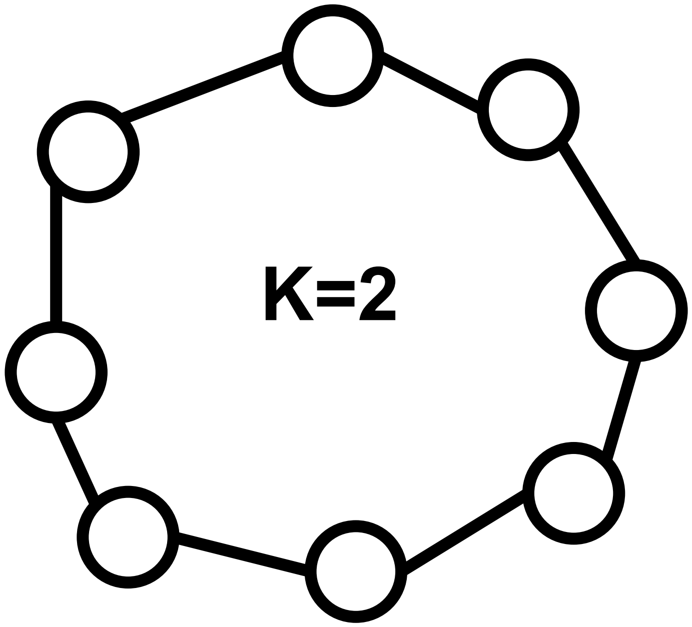
Gerando uma rede mundo pequeno

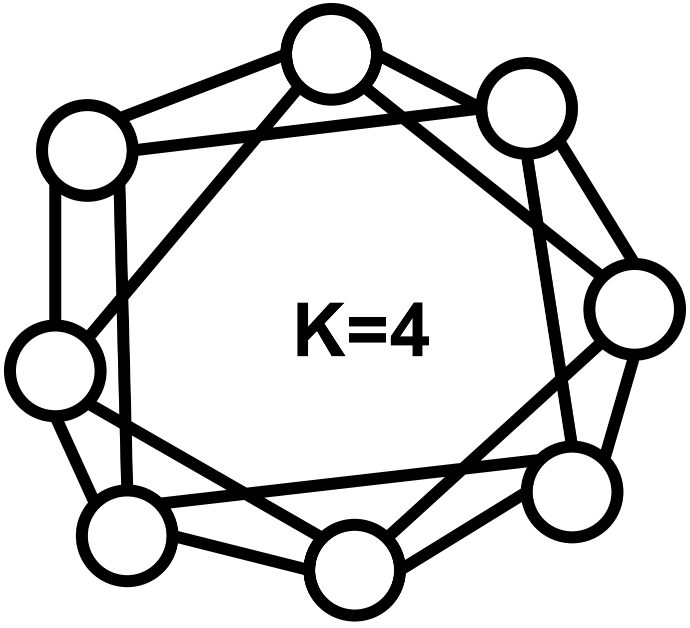
Em 1998, Watts e Strogatz definiram um modelo matemático para gerar uma rede aleatória com características de um rede mundo pequeno.

Esse modelo simplesmente utiliza o modelo Erdõs-Rényi partindo de uma rede com estrutura em **ANEL**.

Gerando uma rede mundo pequeno

Rede em **ANEL** é quando as arestas interligam os k nós vizinhos de tal forma que eles possam ser organizados em forma de uma circunferência.





Universidade Federal do ABC

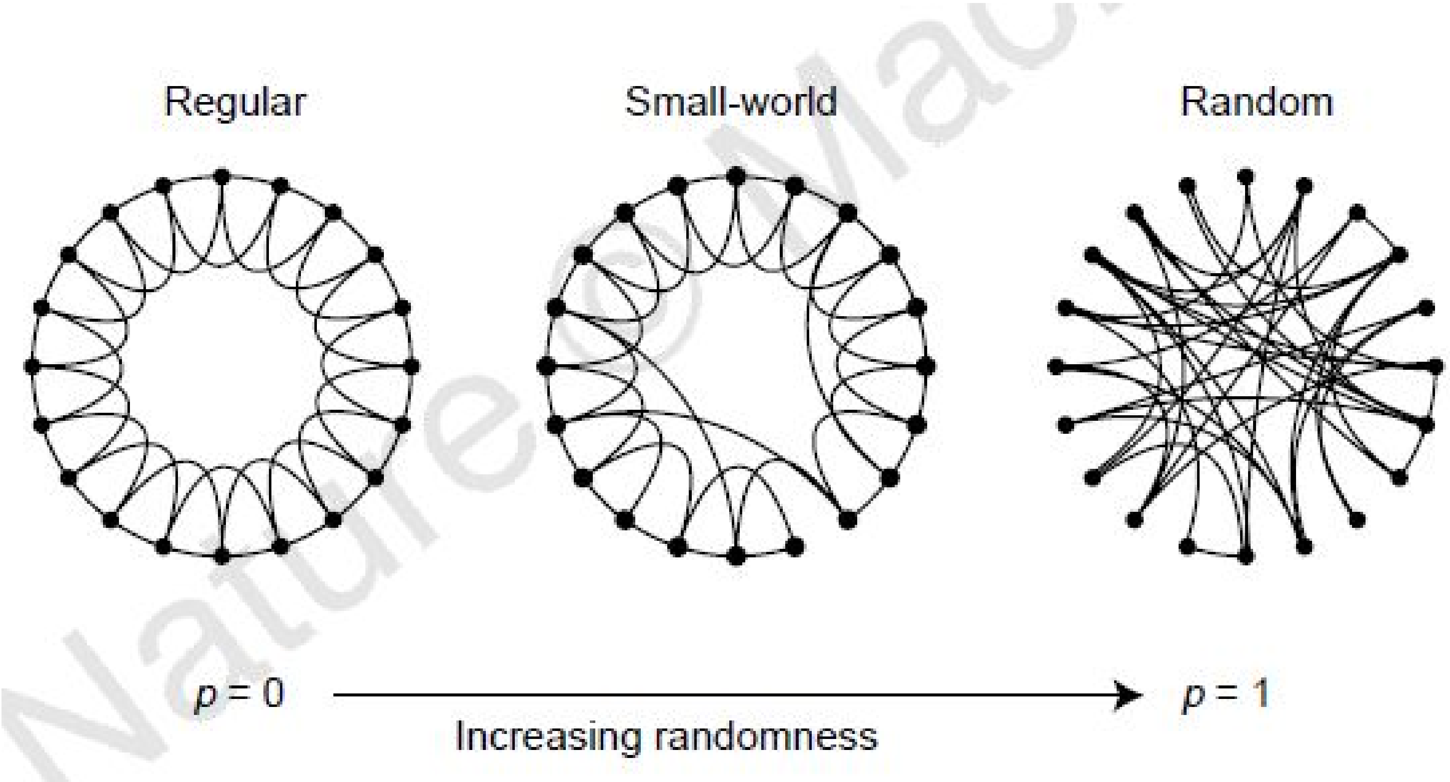
Gerando uma rede mundo pequeno

O modelo parte de uma rede regular em anel, respeitando o número n de nós e cada nó interligado aos k nós vizinhos mais próximos por meio de arestas.

Cada uma das arestas criadas sofre uma reconexão com probabilidade p, ligando o nó de origem a um novo destino.

Quanto maior o valor de p mais próxima a rede fica de uma rede aleatória Erdős-Rényi.

Gerando uma rede mundo pequeno



D. J. Watts and S. H. Strogatz, Collective dynamics of “smallworld” networks, Nature, 393 (1998), pp. 440–442.

Universidade Federal do ABC

Gerando uma rede mundo pequeno

O modelo G(n,k,p), cria uma rede com *n* nós, cada nó com grau inicial igual a *k* e probabilidade de reconexão igual a *p*.

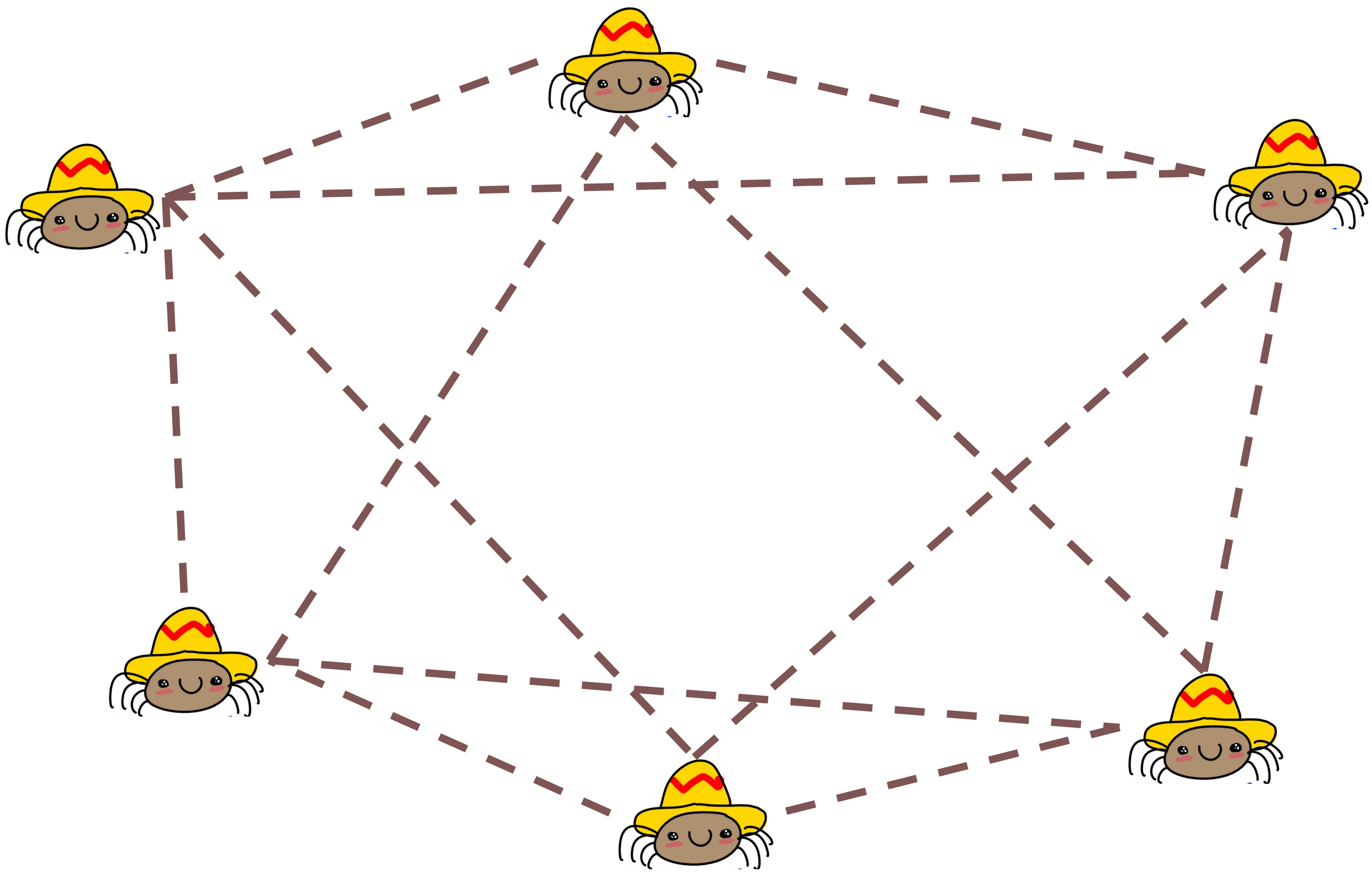
Para cada nó *ni*, conectá-lo aos nós n*j* tal que j=i-k/2..i+k/2 (definindo o grau de *ni* como *k*).

Para cada nó *ni* e cada aresta (*ni,nj*) desse nó, reconecta essa aresta, criando uma aresta (*ni,nk*) com um nó escolhido aleatoriamente com probabilidade uniforme e $k \neq i$ dada uma probabilidade *p*

Universidade Federal do ABC

Gerando uma rede mundo pequeno

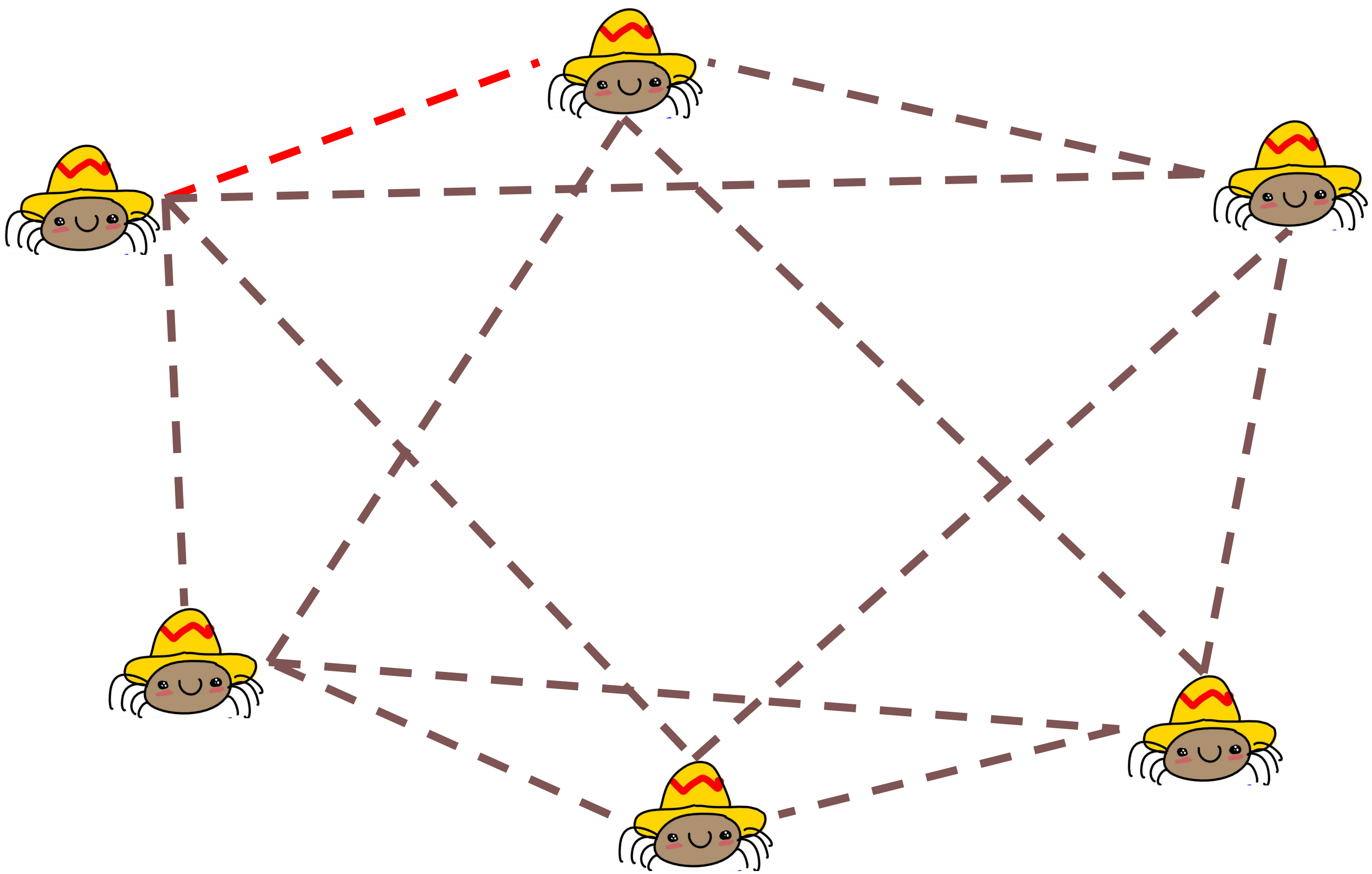
G(6,4,0.3): 6 nós, grau inicial = 4, probabilidade = 30%



Universidade Federal do ABC

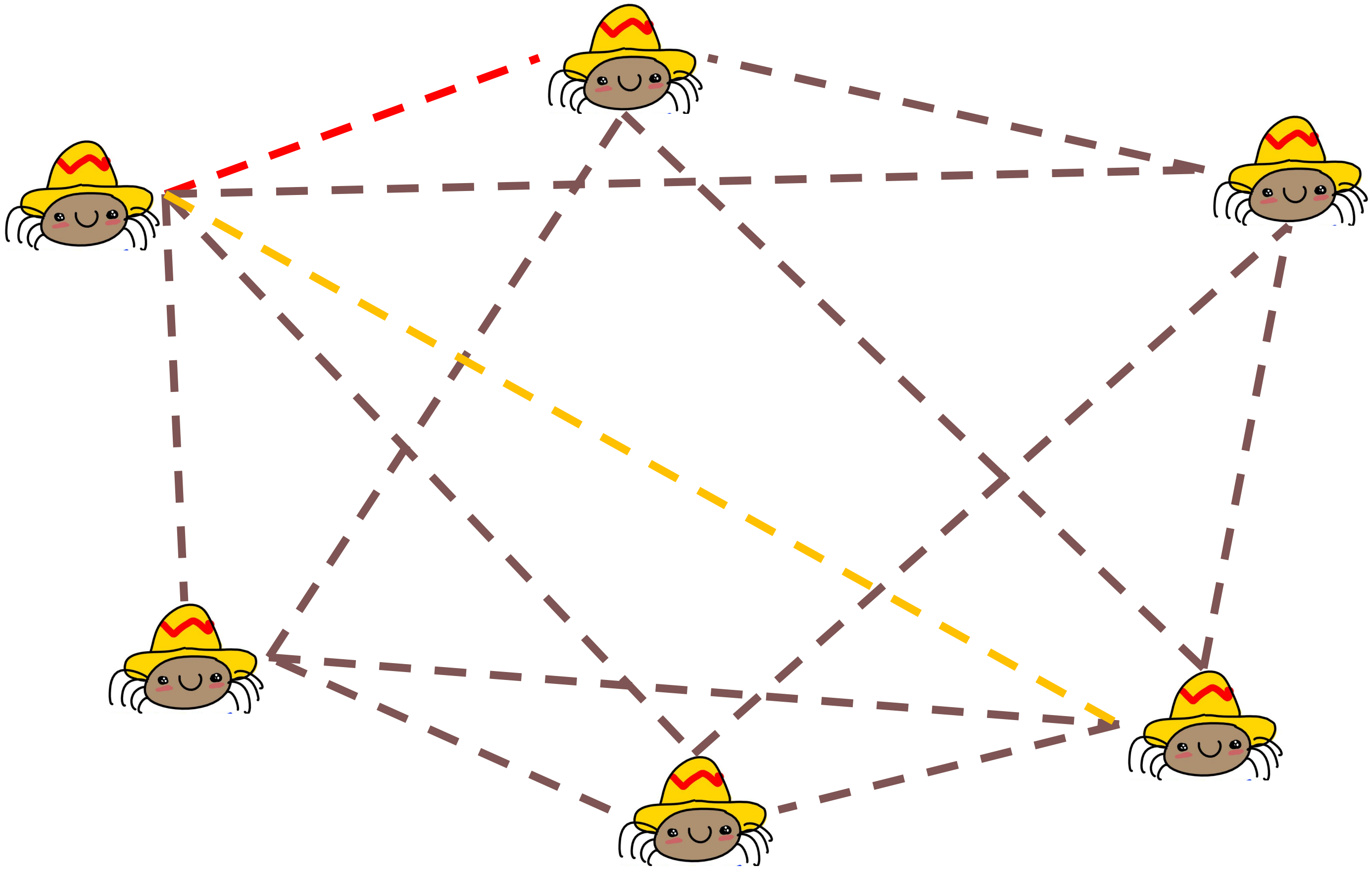
Gerando uma rede mundo pequeno

Para cada aresta, sorteia um número entre 0 e 1 e, se for menor ou igual a 0,3, reconecta a aresta.



Gerando uma rede mundo pequeno

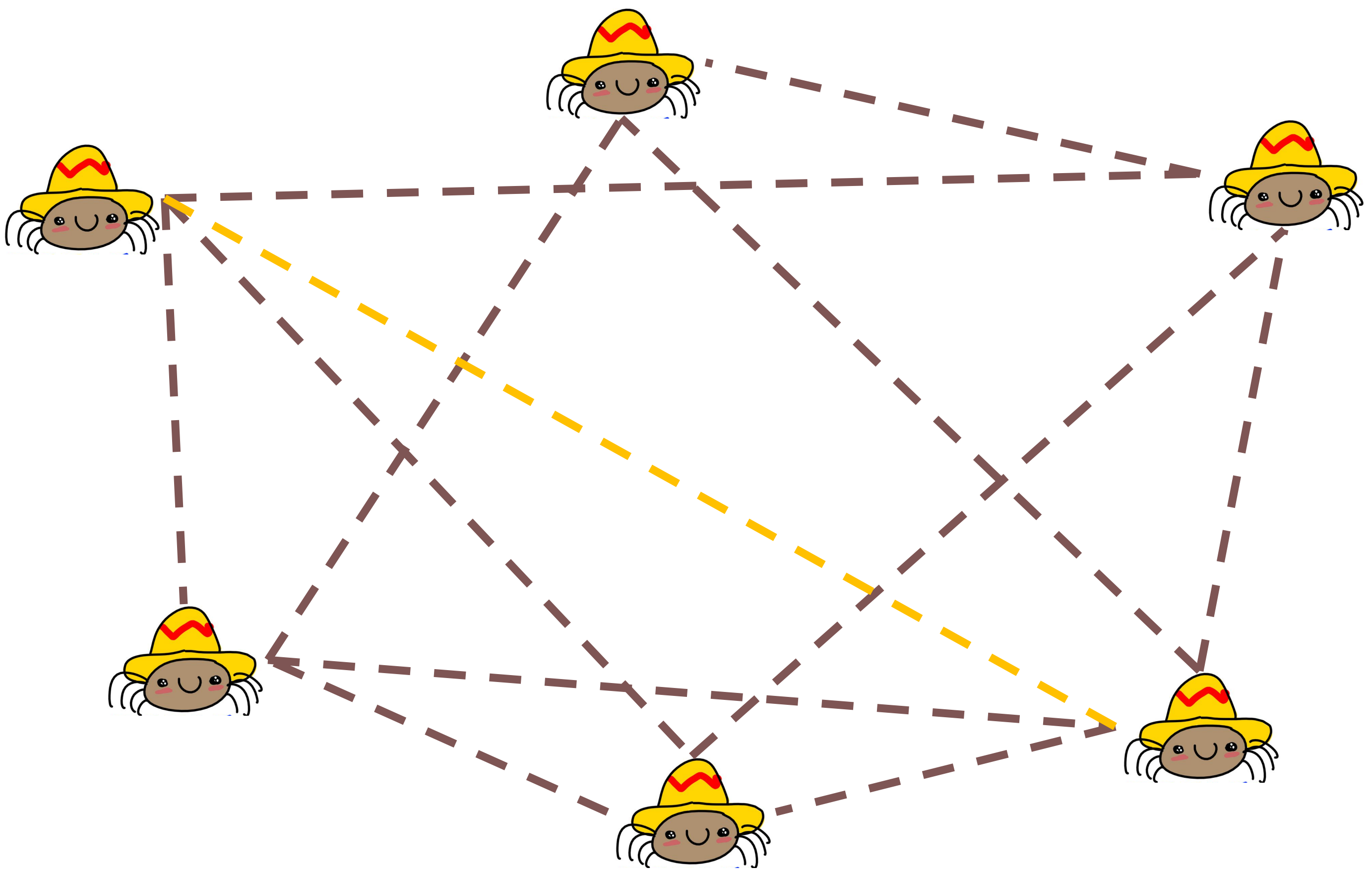
Para cada aresta, sorteia um número entre 0 e 1 e, se for menor ou igual a 0,3, reconecta a aresta.



Universidade Federal do ABC

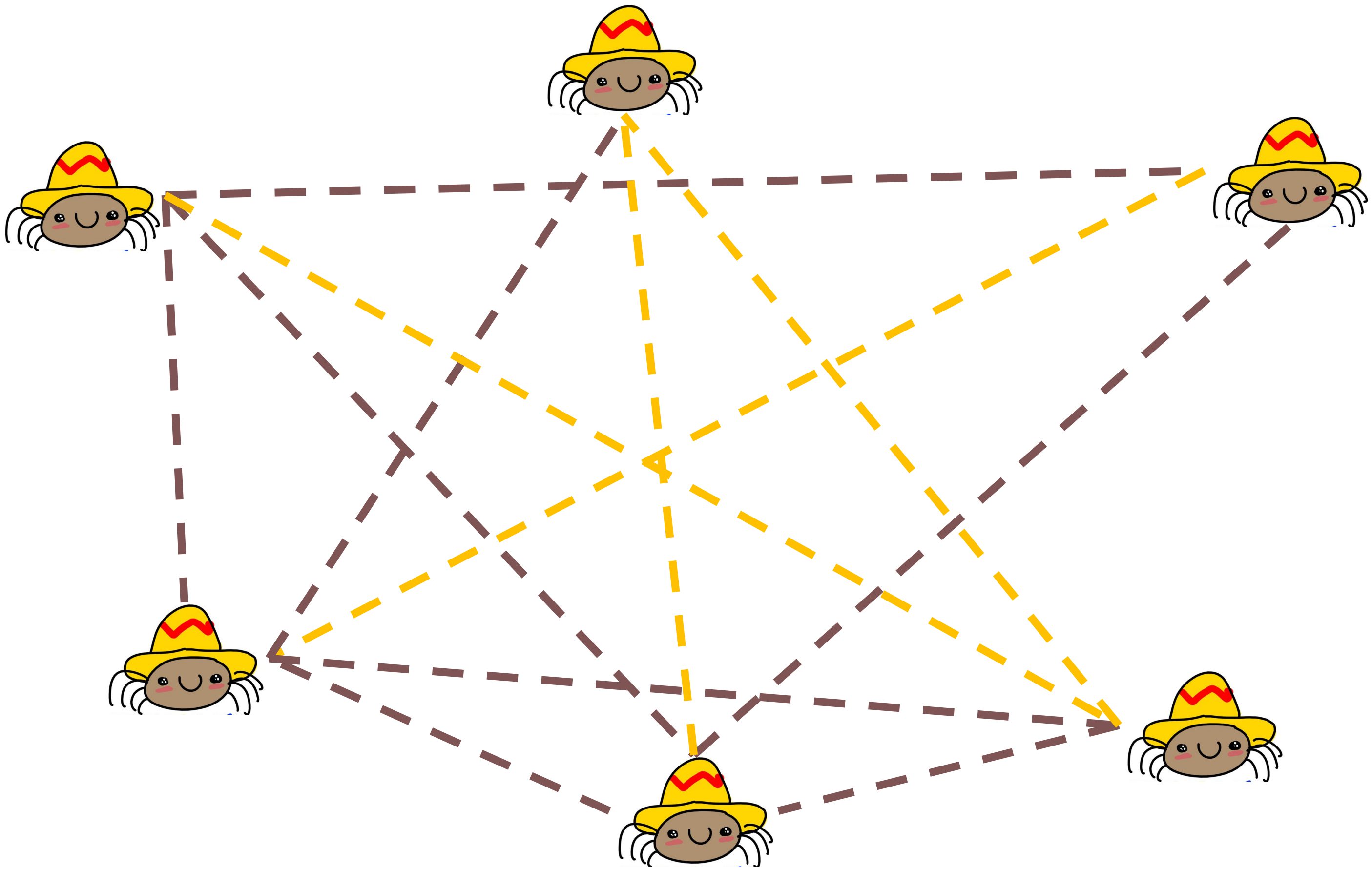
Gerando uma rede mundo pequeno

Para cada aresta, sorteia um número entre 0 e 1 e, se for menor ou igual a 0,3, reconecta a aresta.



Gerando uma rede mundo pequeno

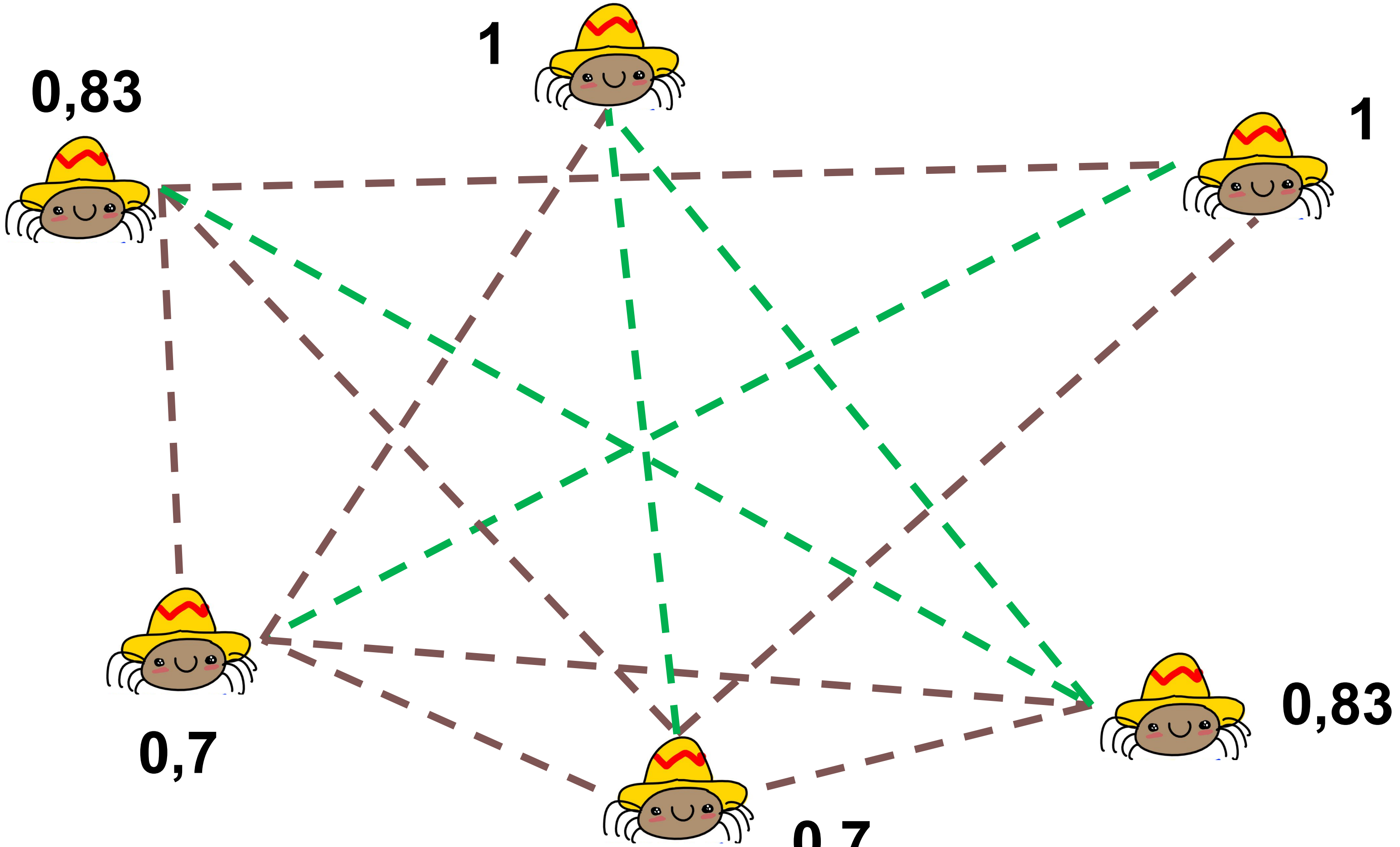
Com esses parâmetros, cerca de 4 arestas vão ser reconectadas ao todo.



Universidade Federal do ABC

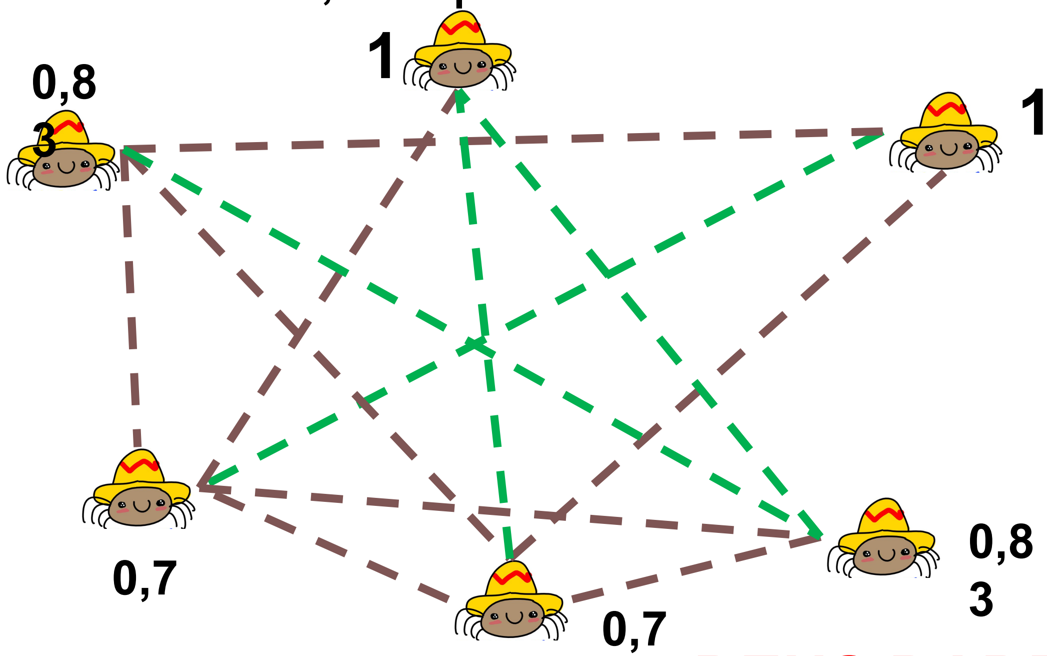
Gerando uma rede mundo pequeno

E o coeficiente de agrupamento médio igual a 0,84.



Gerando uma rede mundo pequeno

Um coeficiente de 0,84 para uma rede é grande ou pequeno?

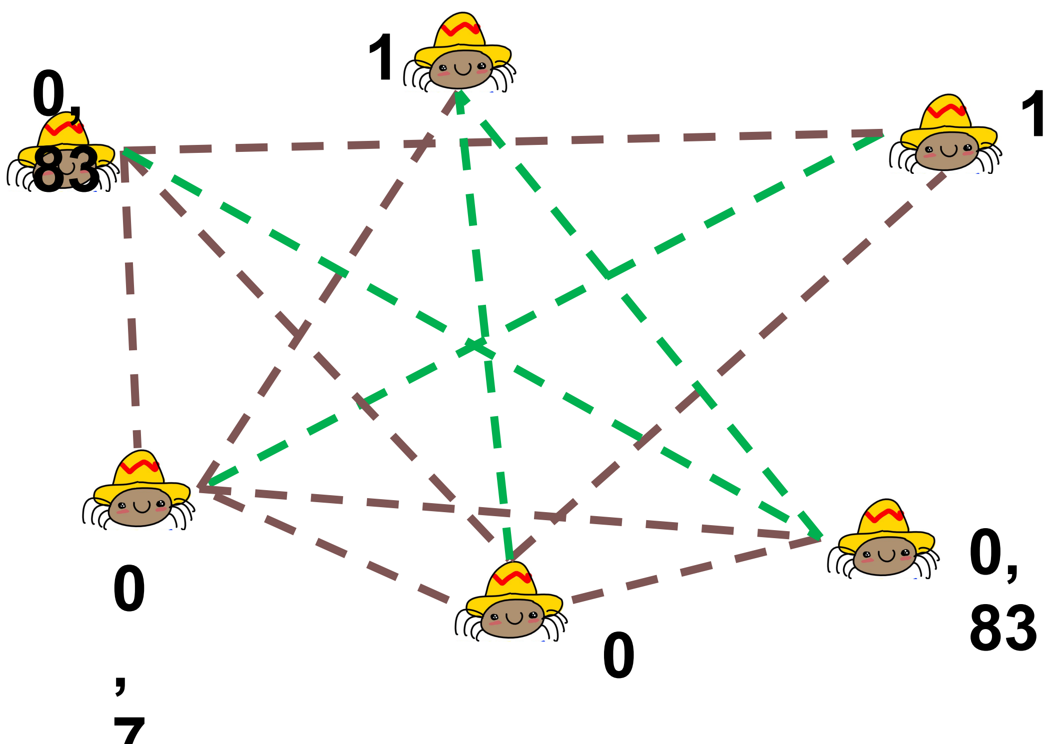


Para comparar vamos calcular a **DENSIDADE** da rede, que é a razão entre o número de arestas e quantas arestas ela poderia ter.

Gerando uma rede mundo pequeno

p = E / (N* (N-1)/2)

A densidade da rede é a probabilidade de que, se pegarmos dois nós aleatoriamente, eles estejam conectados.



Universidade Federal do ABC

Gerando uma rede mundo pequeno

Então se a média do coeficiente de agrupamento é muito maior que p:

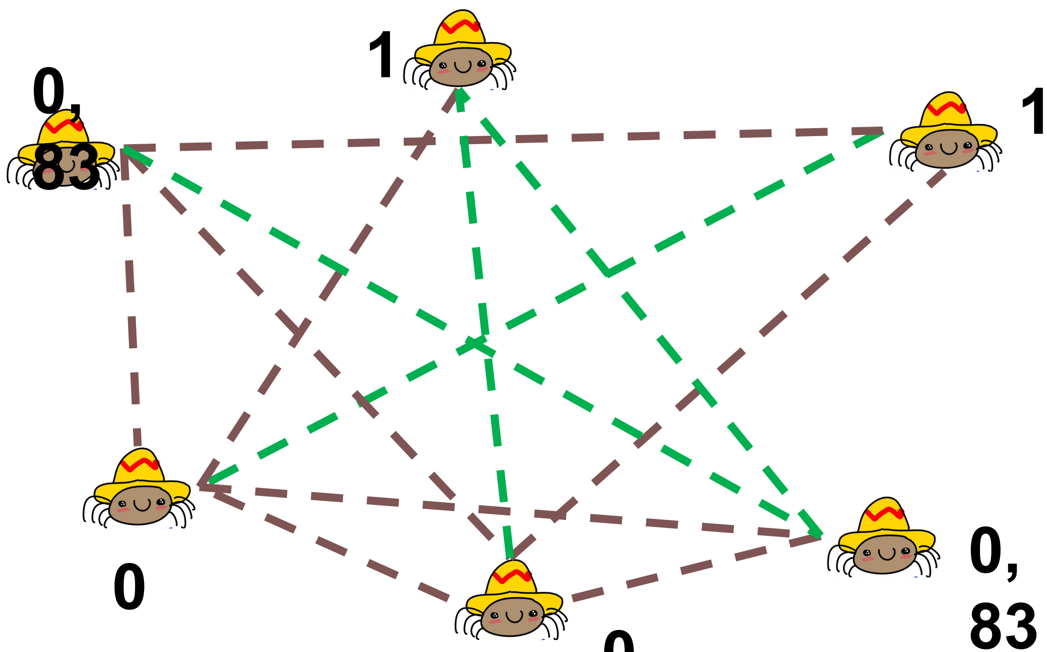
$C >> p$

Significa que a probabilidade de fechamentos triádicos (C) é maior que uma probabilidade uniforme (p) de duas arestas estarem conectadas.

Universidade Federal do ABC

Gerando uma rede mundo pequeno

No nosso caso, p = 12/(6*5/2) = 12/15 = 0,8



E nosso C = 0,84; note que a diferença é menor pois temos uma rede com poucos nós, em redes maiores a diferença tende a ser maior.

Universidade Federal do ABC

Rede Mundo Pequeno

As redes criadas pelo modelo de Watts-Strogatz tem as seguintes propriedades:

- O grau de separação médio varia rapidamente entre n/2k e ln(n)/ln(k) quando a probabilidade *p* varia entre 0 e 1
- O coeficiente de agrupamento fica em torno de $3(1-p)^3/4$
- A distribuição do grau continua se aproximando de poisson.

Universidade Federal do ABC

Universidade Federal do ABC

MODELOS DE REDE SEM ESCALA

Modelos de Redes Sem Escala

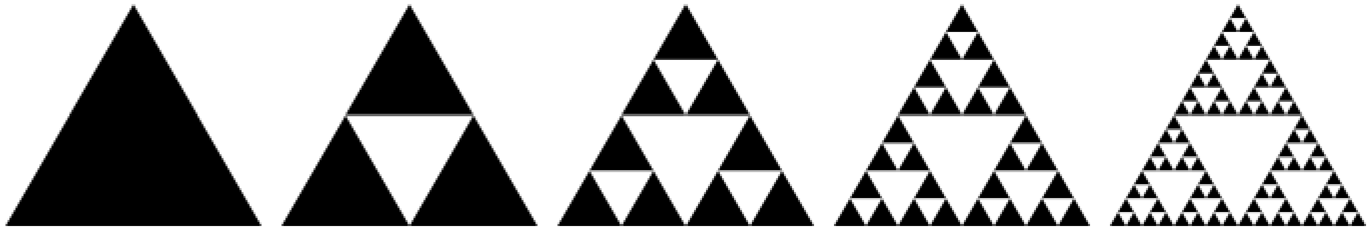
Seguindo os modelos de redes aleatória e de mundo pequeno vistos anteriormente e, com a percepção da característica de lei de potência de redes reais, é desejável criar modelos que consigam reproduzir a criação de diversas redes reais e suas características.

O primeiro passo para definir tal(is) modelo(s) é investigar como o padrão invariante em escala é construído.

Revisitando os Fractais

Relembrando alguns modelos de fractais, você tem uma construção **ITERATIVA** da figura.

Exemplo: triângulo de Sierpinski



Redes Sem Escala

As redes sem escala também podem ser vistas como um processo iterativo.

Esse processo inicia com um único nó, ou uma única aresta e, para cada novo nó inserido escolhe-se, seguindo um modelo, quais nós ele se conectará.

Redes Sem Escala

Percebe-se que a rede cresce dinamicamente tendo como base o modelo das escolhas de ligações de cada novo nó.

Isso leva a um outro tema interessante a ser estudado em redes reais: como elas crescem?

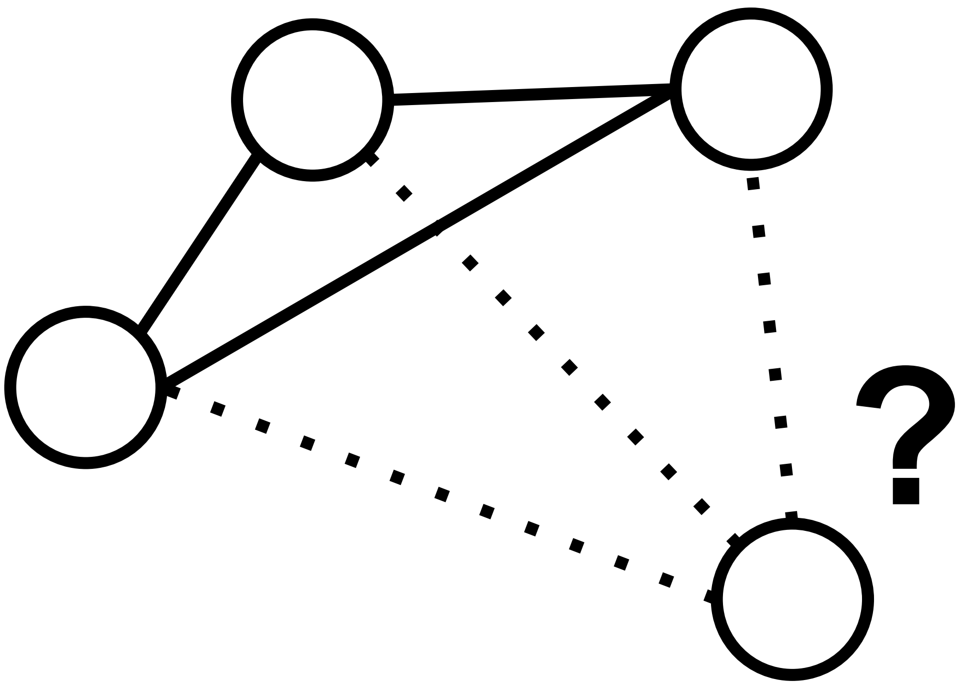
Redes Sem Escala

Basicamente existem dois pontos importantes no crescimento de uma rede sem escala:

- **Taxa de crescimento:** em que taxa novos nós e arestas surgem?
- **Ligação preferencial:** com quais nós os novos nós irão se conectar?

Taxa de Crescimento

Cada novo nó **n** escolhe **m** outros nós para se conectar criando **m** novas arestas.



Como fazer um modelo mais realístico?

Redes reais têm certas propriedades observáveis em seu crescimento:

- em uma rede social, novos nós **preferem** se conectar aos nós mais populares

- em certas redes os nós mais antigos param de receber novas ligações (atores se aposentam, pessoas morrem, informações se tornam defasadas)

- em uma cadeia alimentar certos animais são presas mais fáceis

Universidade Federal do ABC

Ligação Preferencial

Um modelo de ligação preferencial que aparenta representar a maioria das redes sem escala reais é o “Processo Yule”, também conhecido como “Efeito Matthew”, “Ricos ficam mais ricos” e muitos outros nomes.

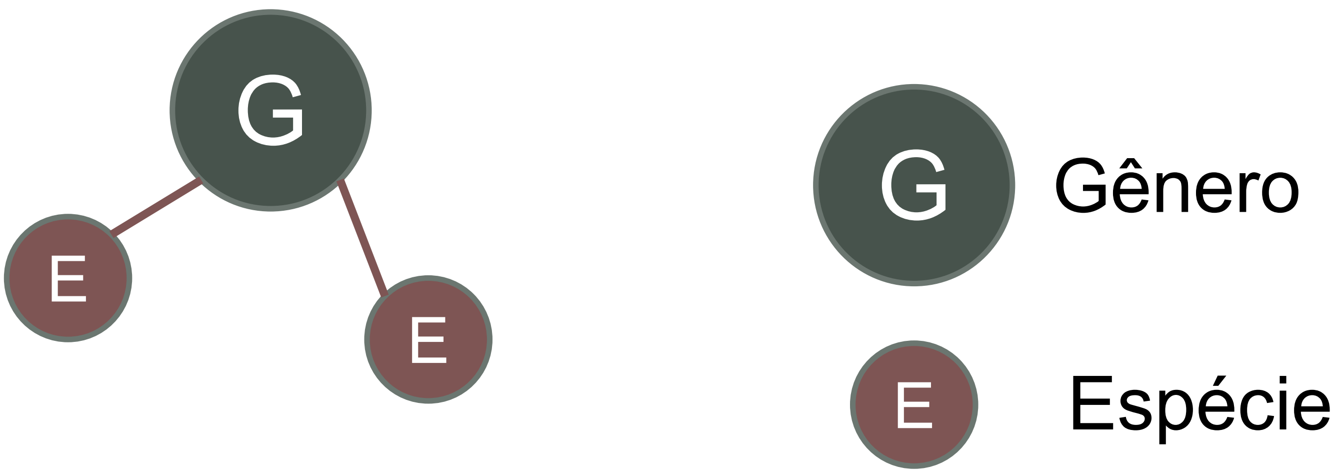
Basicamente o modelo indica que um novo nó de uma rede tem preferência para se conectar com os nós melhores conectados, ou seja, de maior grau.

Ligação Preferencial

Tomando como exemplo a evolução das espécies e partindo do princípio que todos os seres vivos tem um ancestral comum, temos que inicialmente existe apenas uma única espécie, a qual pertence a um determinado gênero:

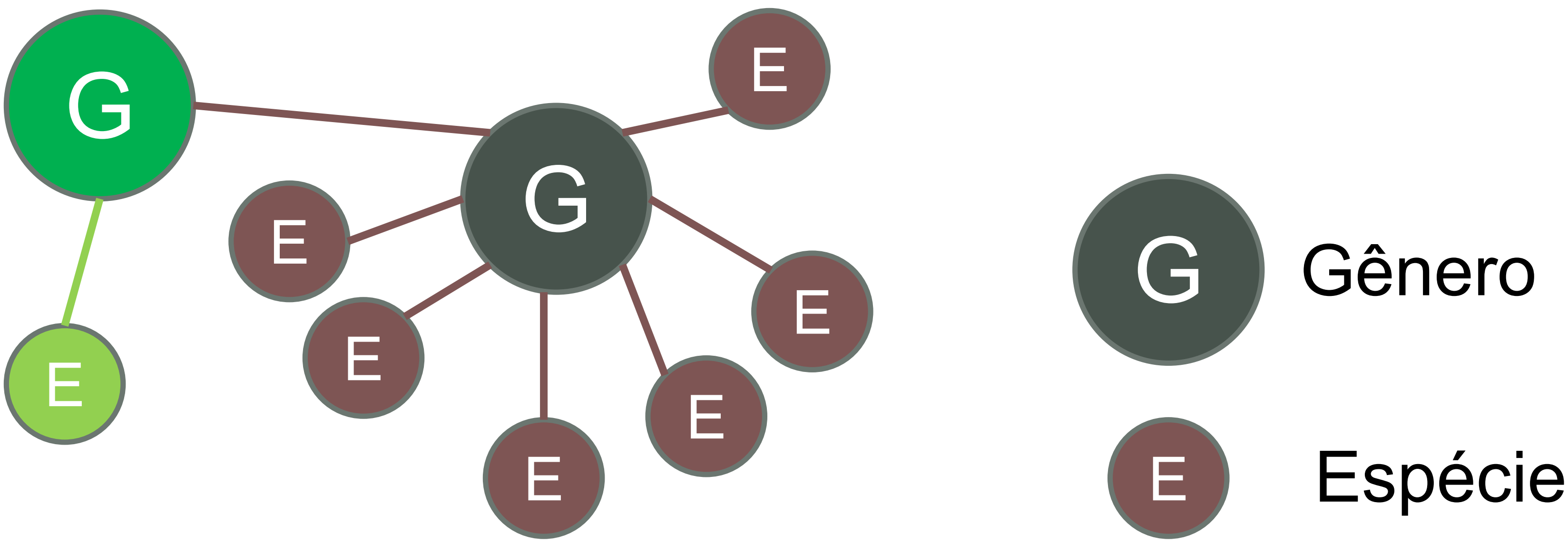
Ligação Preferencial

A única espécie que temos sofre mutação e gera uma nova espécie. Como a mutação é pequena, a variação genética é pequena e, consequentemente, a nova espécie ainda pertence ao mesmo gênero:



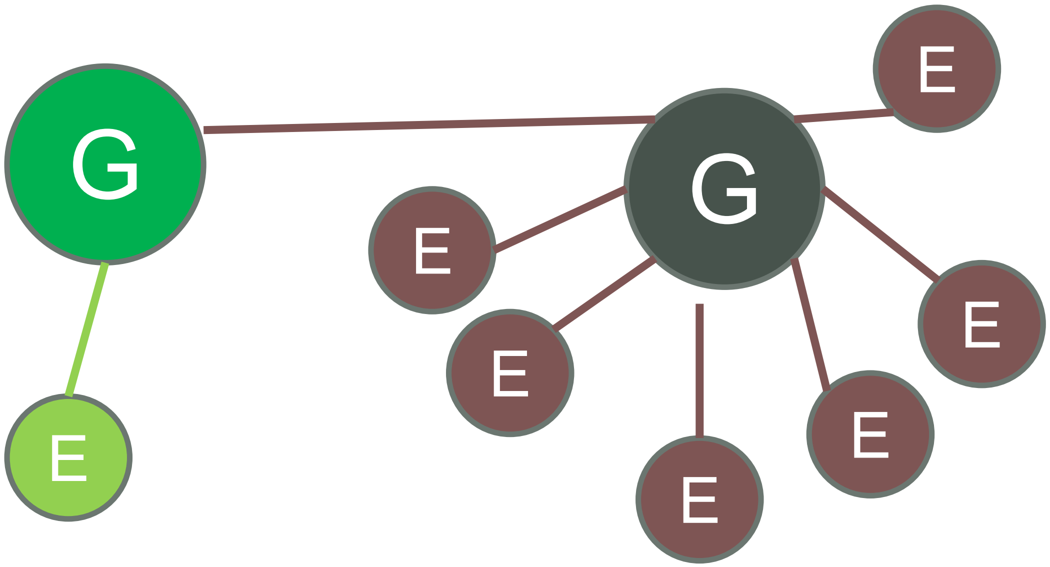
Ligação Preferencial

Com o passar do tempo e com sucessivas mutações, eventualmente uma espécie se distanciará do gênero de onde foi *mutado*, determinando um novo gênero:



Ligação Preferencial

Logo, a especiação se torna mais provável nos gêneros com maior número de espécies, pois a taxa de mutação é constante.



Universidade Federal do ABC

Ligação Preferencial

Esse mesmo efeito pode ser observado na economia: a concentração de riqueza. Quem é rico, tem maiores chances de ficar mais rico.

É observável que, mesmo em países desenvolvidos, cerca de 90% da riqueza está concentrada em 5% da população.

Ligação Preferencial

Se analisarmos um sistema econômico em seu início, mesmo que toda população ganhe exatamente o mesmo salário, alguns tem predisposição a gastar menos do que os outros, levando a concentração de riqueza nesses ao longo do tempo.

Universidade Federal do ABC

Ligação Preferencial

Ao concentrar riquezas um indivíduo tende a poder pagar melhores estudos e garantir melhores empregos aos seus descendentes.

Eles também tem mais dinheiro para investir massivamente em novos projetos que geram mais lucros.

Universidade Federal do ABC

Ligação Preferencial

E, finalmente, a influência política e social também tende a um patamar elevado, o que favorece para que esses consigam atrair mais dinheiros.

Obviamente, para equilibrar a equação, os pobres acabam ficando mais pobres.

Existe, então, um modelo econômico justo e que não leve a uma lei de potência na distribuição de renda?

Universidade Federal do ABC

Ligação Preferencial

Analogamente, o crescimento populacional nas cidades sofre o mesmo efeito.

Uma cidade com melhores empregos atraem mais pessoas, o crescimento no número de sua população causa surgimento de mais empregos, atraindo mais pessoas e sucessivamente...

Redes sociais também são criadas dessa forma: quem tem muitos amigos são populares e atraem mais amigos.

Modelo Barabási-Albert

Esse modelo de construção de rede sem escala utiliza um modelo de ligação preferencial:

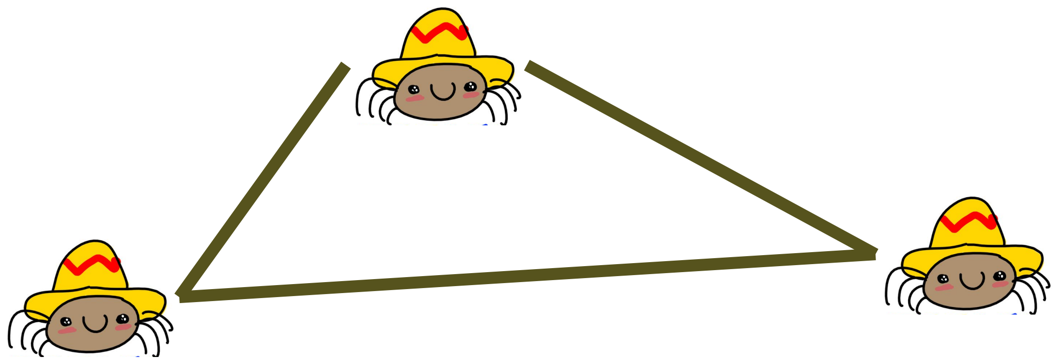
- Inicie com um conjunto n_0 de nós totalmente conectados
- Novos vértices são inseridos na rede a cada instante (crescimento)
- Para cada novo nó, n_i, m arestas são desenhadas ligando n_i a um dos nós já existentes com probabilidade proporcional ao grau desses nós (ligação preferencial):

$$P(k_i) = \frac{k_i}{\sum_{j=1,n} k_j}$$

Universidade Federal do ABC

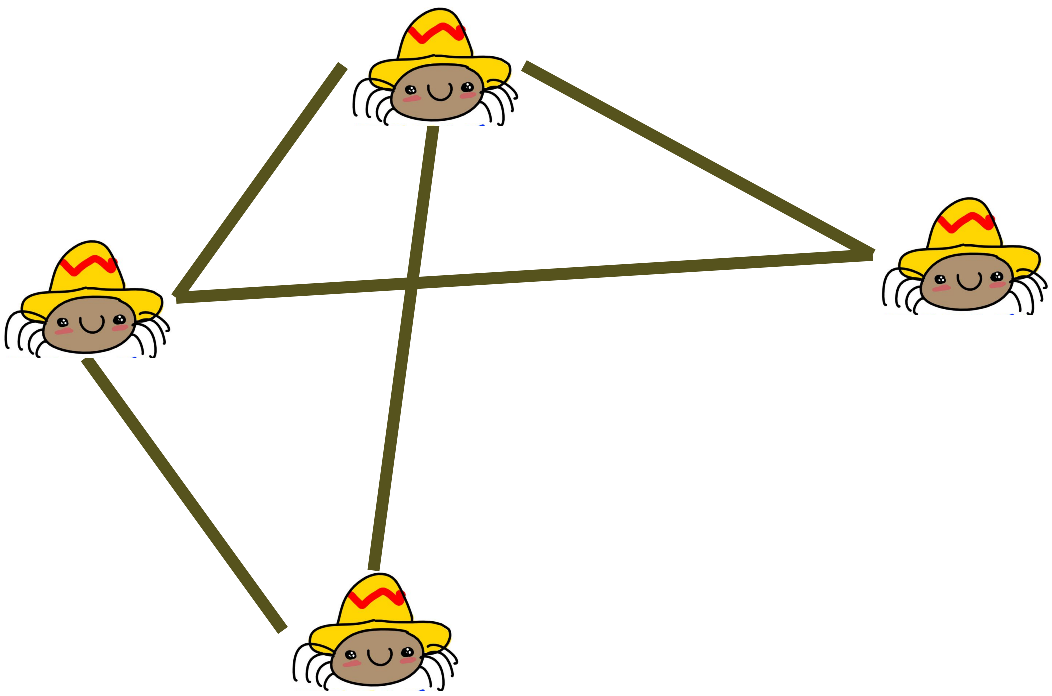
Modelo Barabási-Albert

Vamos iniciar com um conjunto de 3 nós:



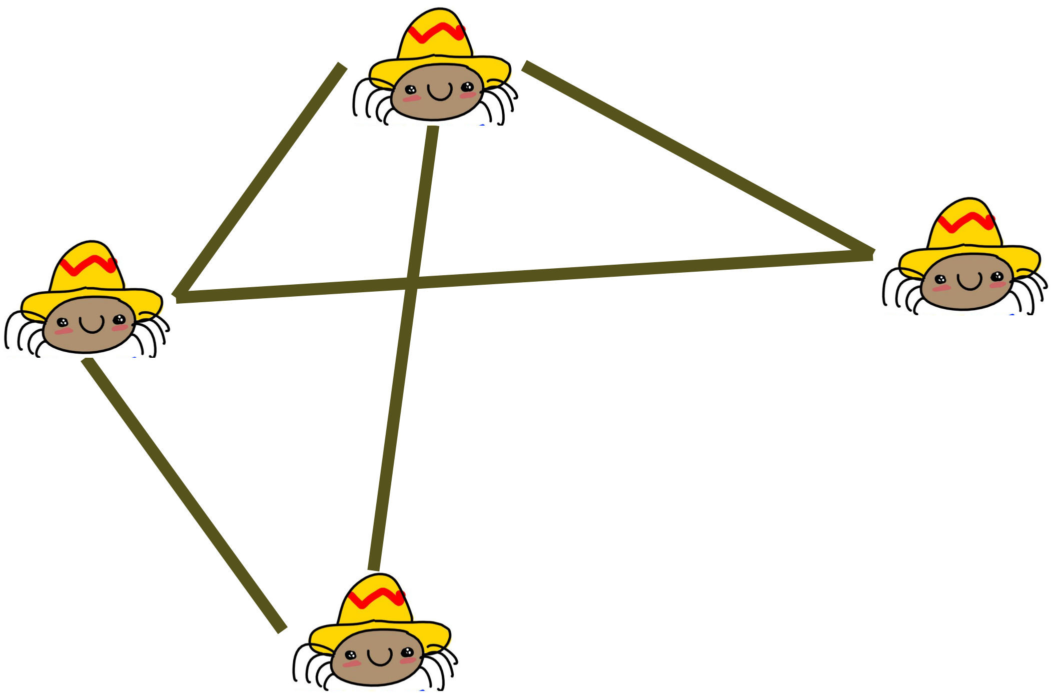
Modelo Barabási-Albert

Em cada passo, um novo nó é inserido e 2 arestas são desenhadas. Inicialmente com probabilidade uniforme.



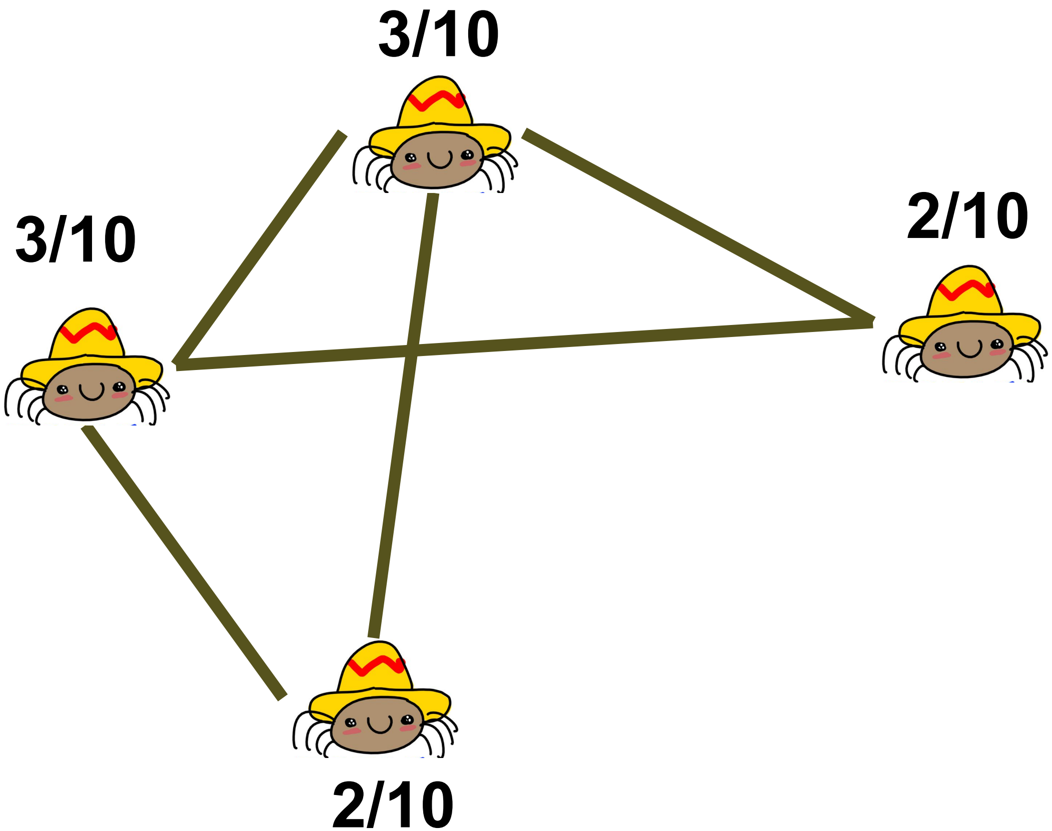
Modelo Barabási-Albert

Esse novo nó tem probabilidade 2/10 de ser escolhido no próximo passo:



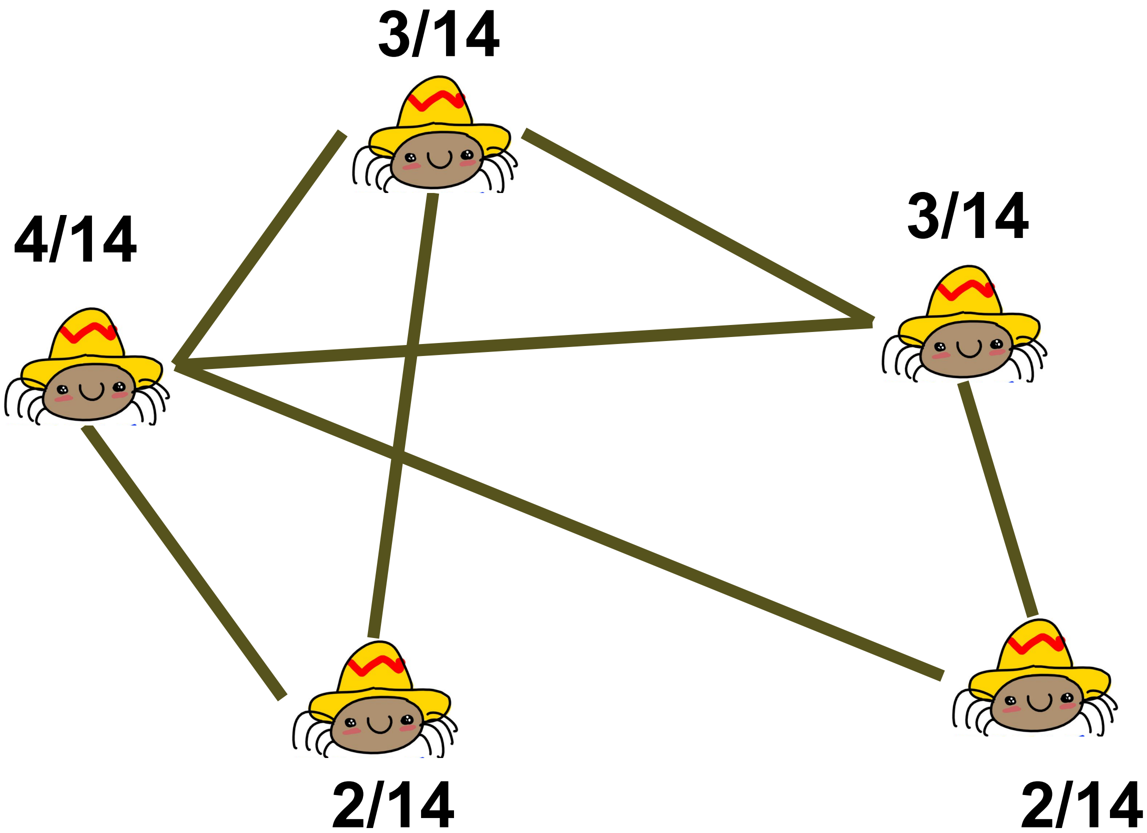
Modelo Barabási-Albert

Esse novo nó tem probabilidade 2/10 de ser escolhido no próximo passo:



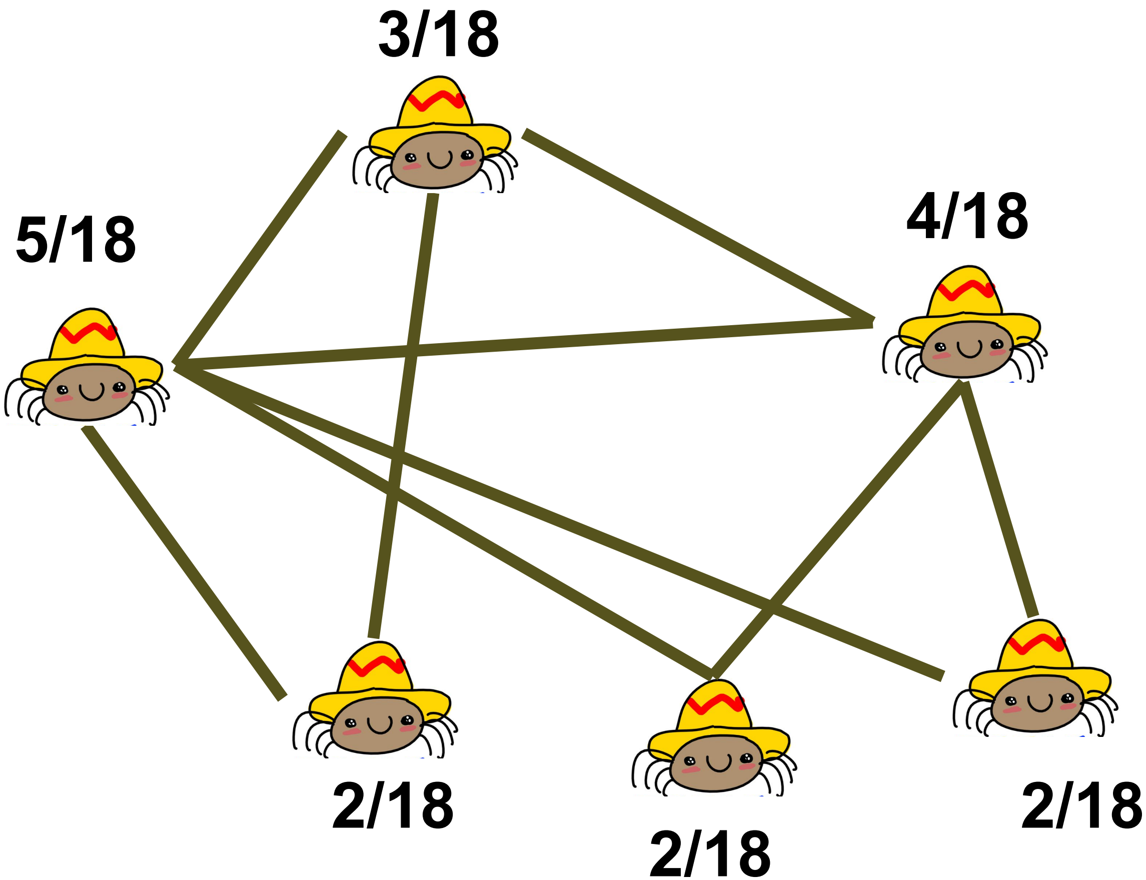
Modelo Barabási-Albert

Cada novo nó inserido as probabilidades se alteram.



Modelo Barabási-Albert

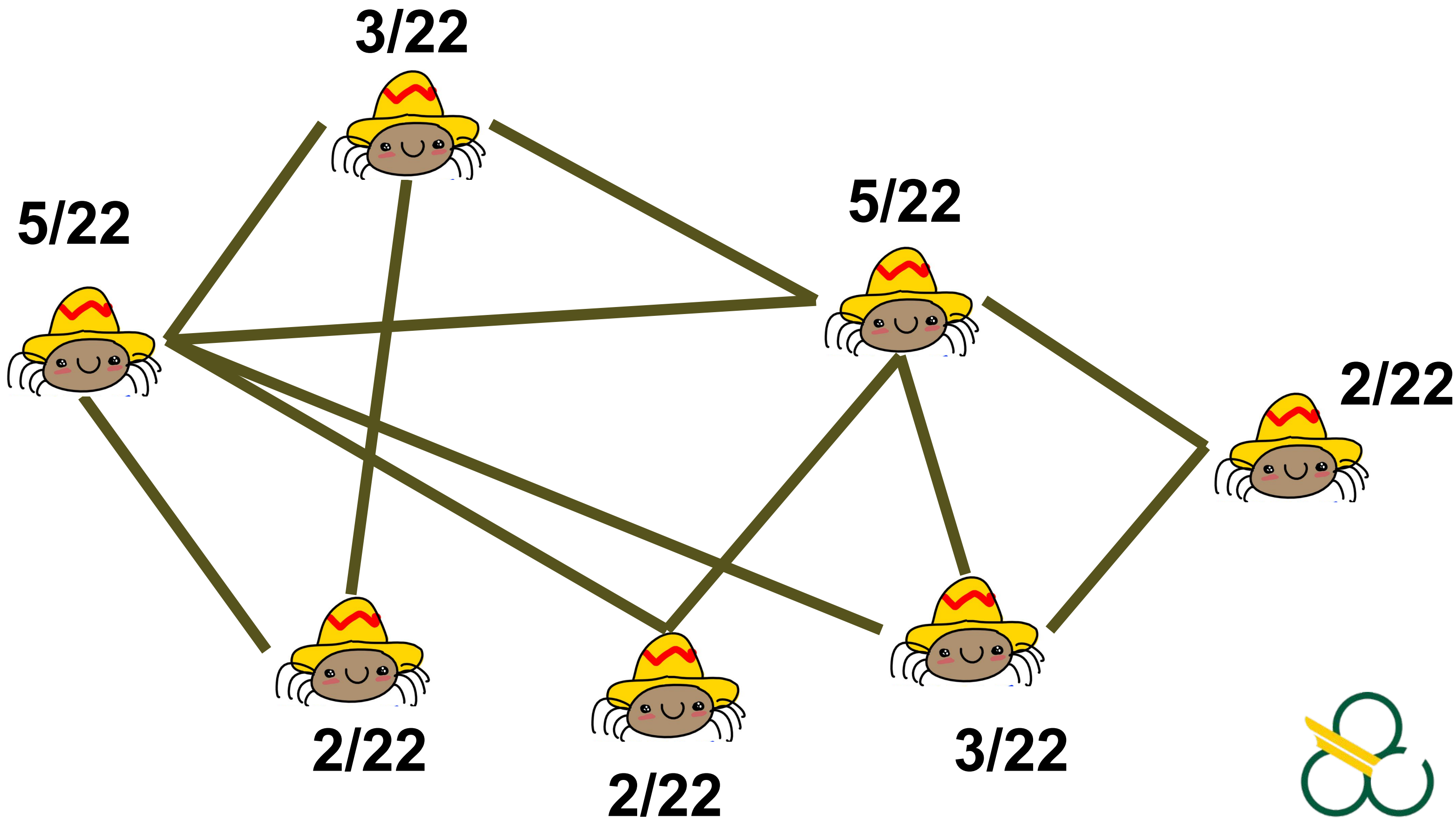
Os nós com maior grau, começam a captar cada vez mais ligações.



Universidade Federal do ABC

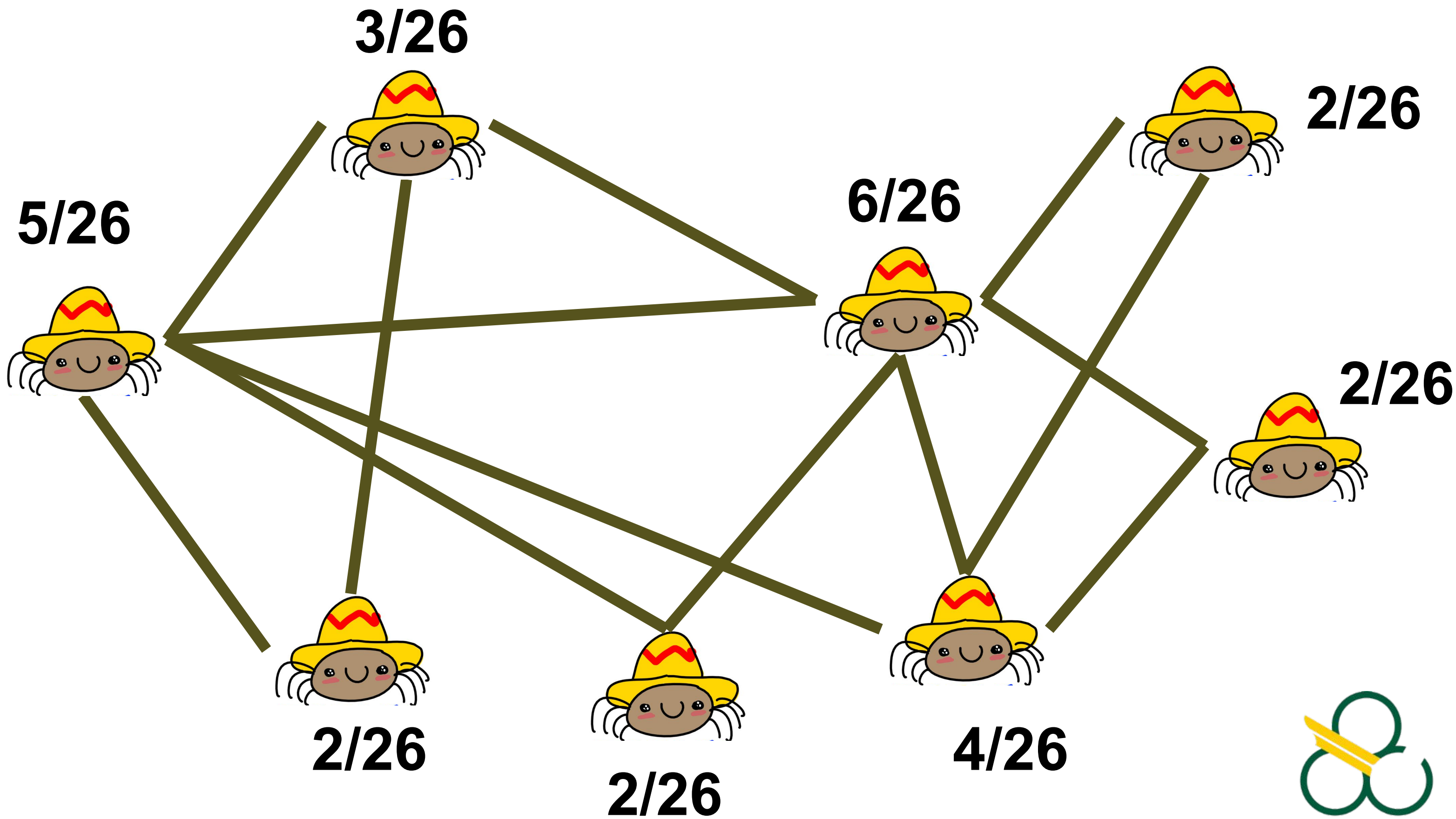
Modelo Barabási-Albert

E as probabilidades cada vez mais reflete a concentração de riquezas.



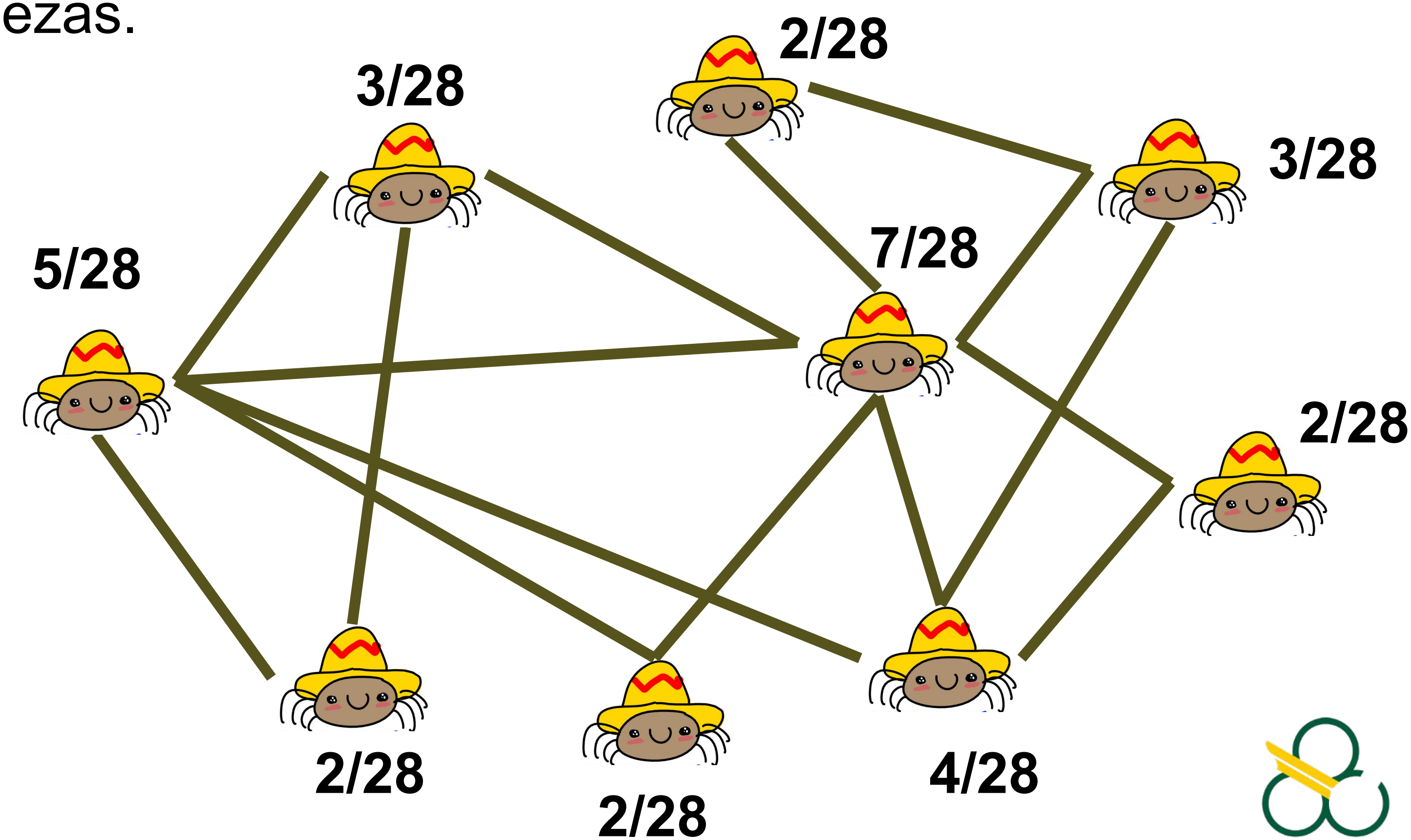
Modelo Barabási-Albert

E as probabilidades cada vez mais reflete a concentração de riquezas.



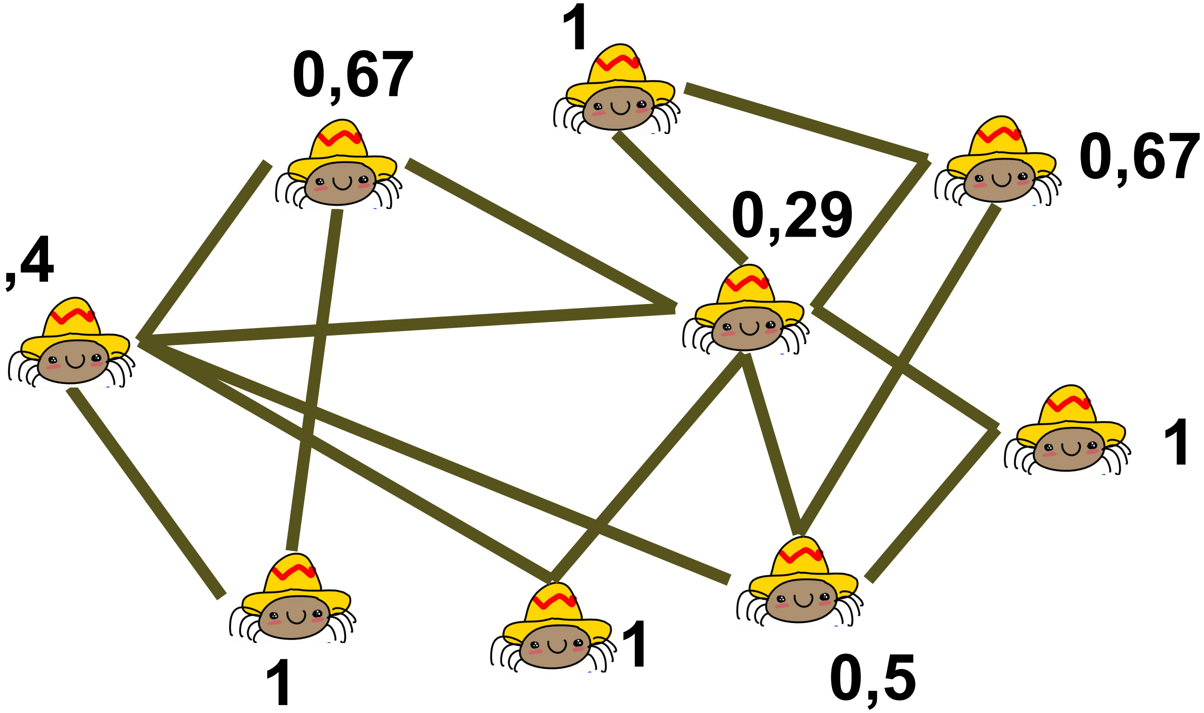
Modelo Barabási-Albert

E as probabilidades cada vez mais reflete a concentração de riquezas.



Modelo Barabási-Albert

A distância média é igual a **1,67** e o coeficiente de agrupamento médio é igual a **0,724**.



A densidade dessa rede é: p=15/(72/2)=0,42 => C >> p

Modelo Barabási-Albert

Vamos ver a distribuição dos graus:

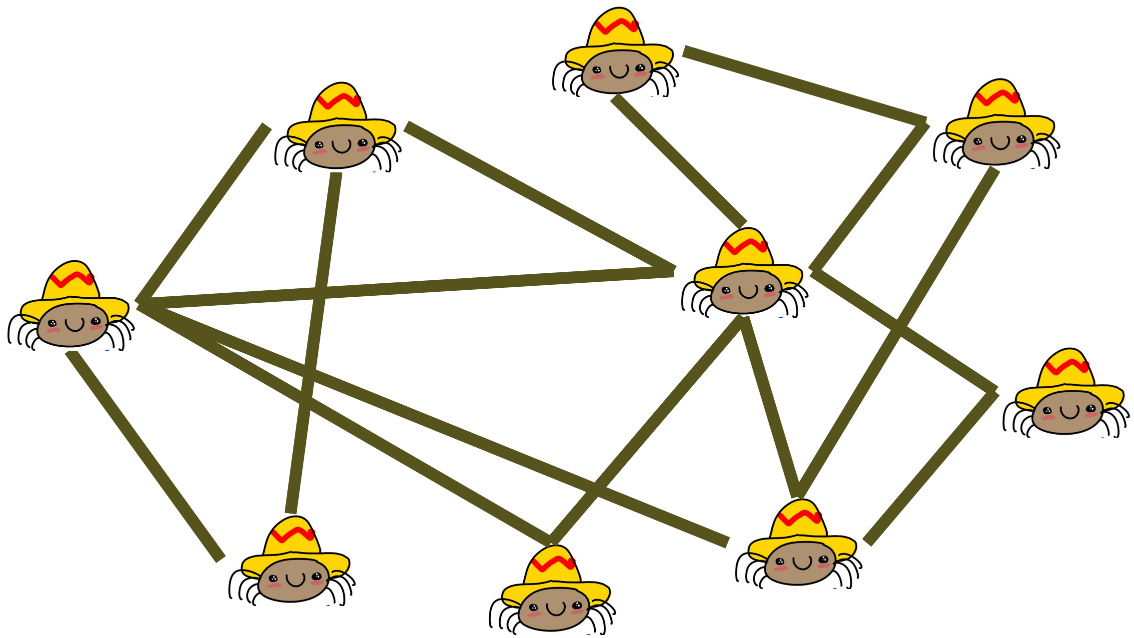
P(k=2) = 4

P(k=3) = 2

P(k=4) = 1

P(k=5) = 1

P(k=7) = 1



Verificamos que ele tende a seguir uma lei de potência.

Universidade Federal do ABC

Modelo Barabási-Albert

Vamos ver a distribuição dos coef. de agrupamento:

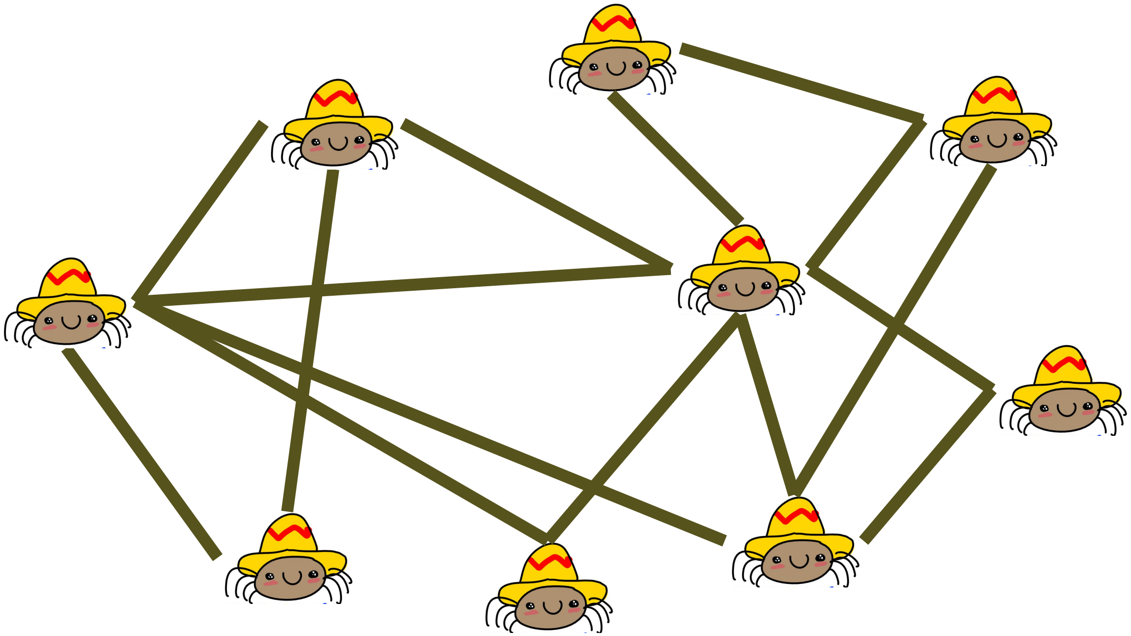
P(c=1) = 4

P(c=0,67) = 2

P(c=0,5) = 1

P(c=0,4) = 1

P(c=0,29) = 1



Verificamos que ele também segue uma lei de potência.

Universidade Federal do ABC

Modelo Barabási-Albert

Esse modelo gera uma rede sem escala com fator de potência α=3:

$$P(k) \sim k^{-3}$$

O diâmetro da rede cresce de forma logarítmica em função do tamanho da rede:

$$D \sim {\ln(n)}/{\ln(\ln(n))}$$

O coeficiente de agrupamento também segue uma lei de potência com fator α=-3/4:

$$P(c) \sim c^{-3/4}$$

Universidade Federal do ABC

Alterações no modelo Barabási-Albert

Algumas modificações foram propostas para tornar o modelo mais próximo das redes reais:

1. Criação de função de afinidade, indicando que um determinado nó é mais propenso a receber ligações;

2. Crescimento não apenas dos nós, mas também das arestas;

3. Envelhecimento dos nós.

Função de Afinidade

Se na rede estudada, cada nó tem uma importância bem definida, é possível usar essa mensuração para influenciar na probabilidade de novas conexões:

- Uma estação de metrô com bastante demanda;
- Uma pessoa muito famosa;
- Um animal carnívoro que se alimenta de muitos outros.

Função de Afinidade

-

Dessa forma a probabilidade se torna:

$$P(k_i, \eta_i) = \frac{\eta_i k_i}{\sum_{j=1,n} \eta_j k_j},$$

com *ηi* representando numericamente a importância do nó *i*.

Universidade Federal do ABC